

Theoretische Membranphysik:
vom Formenreichtum der Vesikel

J.L. van Hemmen
Physik Department der TU München

Garching bei München

© 2001 J.L. van Hemmen

In der Mathematik wie in aller wissenschaftlichen Forschung treffen wir zweierlei Tendenzen an: die Tendenz zur Abstraktion — sie sucht die *logischen* Gesichtspunkte aus dem vielfältigen Material herauszuarbeiten und dieses in systematischen Zusammenhang zu bringen — und die andere Tendenz, die der Anschaulichkeit, die vielmehr auf ein lebendiges Erfassen der Gegenstände und ihre *inhaltlichen* Beziehungen ausgeht.

Aus David Hilbert's Vorwort zu *Anschauliche Geometrie* (1932)

Vorwort

Das Dilemma, das David Hilbert so klar erkannte und formulierte, und das ihn und Stephan Cohn-Vossen zum Verfassen des meisterhaften Buches *Anschauliche Geometrie* führte, gilt nicht weniger für die theoretische Physik. Die vorliegende Vorlesung zur theoretischen Membranphysik der Vesikel-Formen versucht beides: die Integration der Abstraktion, die zum tieferen Verständnis führt, und der Anschaulichkeit, die unserem Vorstellungsvermögen zu Hilfe kommt.

Das jetzige Skriptum prätendiert gar nichts, obwohl es schon einiges bietet, das es in dieser Form noch nicht gibt. Es versucht nur, auf mathematisch elegante und dennoch anschauliche Weise, eine theoretische Einführung in die faszinierende Welt der Vesikel-Formen bereit zu stellen. Dabei habe ich mich von der Überlegung leiten lassen, dass ein wirkliches Verständnis ein bisschen mehr als eine Minimalausstattung benötigt. Außerdem sollte das hier Gebotene auch in anderen Bereichen der Physik angewandt werden können.

Die Behandlung der Differentialgeometrie ist deshalb konkret, wird aber schon gleich für den \mathbb{R}^n mit beliebigem n behandelt, und nicht nur für den Spezialfall zwei-dimensionaler Mannigfaltigkeiten in \mathbb{R}^3 . Bei den Literaturangaben habe ich mich bemüht, Referenzen ausgezeichneter Qualität zu erwähnen, die jetzt noch erhältlich oder in einer guten Bibliothek rasch zu beschaffen sind. Die Elastizitätstheorie der dünnen Platte führt direkt zum Funktional der freien Energie in Termen *geometrischer* Eigenschaften der Membran. Sie ist so aufgebaut, dass sie zum Schluss all das Vorhergehende integriert und man nachher auf die dazugehörige reichhaltige Literatur vorbereitet ist. Resultierende Vesikel-Formen minimieren dieses Energie-Funktional. Die Undulationstheorie überspannt als Beschreibung der elementaren Anregungen aus einem (lokalen) Minimum, einer Gleichgewichts-Form, das ganze Gebilde.

Die erste Fassung dieses Skriptums habe ich 1990 geschrieben, als ich dabei war, nach München umzuziehen; es wurde im Laufe der Jahre ausgefeilt und poliert. Ich verdanke es meinem ehemaligen Doktoranden, Herrn Dr. Ulrich Hillenbrand, die handgeschriebene Fassung der ersten drei Kapitel nicht nur in bildschönes L^AT_EX sondern auch in präzise

geschliffenes Deutsch verwandelt zu haben. Außerdem sei Herrn Kollegen Erich Sackmann für seine finanzielle Unterstützung dazu herzlichst gedankt.

Das vierte Kapitel zur Undulationstheorie beruht auf einer gemeinsamen Arbeit mit meinem ehemaligen Doktoranden, Herrn Dr. Christian Leibold. Die Lektüre des 7. Kapitels von Tom Willmore's Buch *Riemannian Geometry* (Oxford University Press, 1993) hat mir gezeigt, wie man hier mathematisch klar, trotzdem relativ einfach und – verglichen mit der vorhandenen, nicht fehlerfreien Literatur – mit minimalem Aufwand zum Operator kommt, der die 2. Variation des Energiefunktionals und damit die elementaren Anregungen eines Vesikels im thermischen Gleichgewicht beschreibt. Ich möchte hier auch Herrn Kollegen Johannes Nitsche (School of Mathematics, University of Minnesota at Minneapolis) für seine kompetenten Hinweise zur Geschichte der Differentialgeometrie und insbesondere des Willmore-Problems herzlichst danken.

Korrekturen und Hinweise werde ich sehr begrüßen. In diesem Zusammenhang möchte ich schon jetzt Rainer Deutschmann und Oliver Wenisch für ihre wertvollen Verbesserungsvorschläge erwähnen.

Zum Schluss bringe ich meinen aufrichtigen Dank zum Ausdruck an einen der hervorragenden Groninger Mathematiker, Professor Johan C. H. Gerretsen, der mir nicht nur die Differentialgeometrie beigebracht sondern auch immer die zugehörige geometrische Perspektive gezeigt hat.

Garching bei München, im Mai 2001

J. Leo van Hemmen.

Inhalt

1	Einführendes über Membranen	1
2	Einführung in die Differentialgeometrie	11
2.1	Die Gram-Matrix	13
2.2	Orthogonale Projektion	13
2.3	Reziproke Basis und metrischer Tensor	14
2.4	Hyperflächen, Tangentialräume und Normalenvektoren	17
2.5	Parameter-Transformationen und Tensoren	21
2.6	Krümmung und Torsion	24
2.7	Parallellflächen	27
2.8	Die Grundformen	28
2.8.1	Die 1. Grundform: Metrik	29
2.8.2	Die 2. Grundform: Krümmung	29
2.8.3	Das Theorem von Meusnier	30
2.8.4	Die Ableitungsformeln von Weingarten	32
2.8.5	Hauptkrümmungen als Lösung eines verallgemeinerten Eigenwertproblems	33
2.8.6	Das Theorem von Euler	35
2.8.7	Die 3. Grundform	37
2.8.8	Die Grundformen bei Parallellflächen	38
2.8.9	Ein einfaches Beispiel	39
2.9	Zwei-dimensionale Flächen in drei Dimensionen	39

2.10	Geometrische Betrachtungen zur Krümmung	42
2.11	Zwei bemerkenswerte Theoreme und ihre Grundformeln	47
2.11.1	Theorema egregium	47
2.11.2	Grundformeln von Mainardi, Codazzi und Gauß	48
2.11.3	Das Theorem von Gauß-Bonnet	51
3	Energiefunktionale der Membranform	53
3.1	Einführung in die Elastizitätstheorie	54
3.1.1	Der Verzerrungstensor	54
3.1.2	Der Spannungstensor	55
3.2	Thermodynamik der Deformation	58
3.2.1	Die Deformationsarbeit	58
3.2.2	Die freie Energie bei konstanter Temperatur	59
3.2.3	Das Hookesche Gesetz	60
3.2.4	Homogene Deformationen	61
3.2.5	Deformationen bei veränderlicher Temperatur	63
3.3	Gleichgewichtsbedingungen	64
3.3.1	Isotroper Körper	64
3.3.2	Die Dünne Platte	65
3.4	Freie Energie und Differentialgeometrie	68
3.5	Das Variationsproblem	70
3.5.1	Das Helfrich-Modell	71
3.5.2	Das Bilayer-Coupling-Modell	71
3.5.3	Skaleninvarianz	73
3.5.4	Die Parametrisierung nach Helfrich	73
3.5.5	Variationsprobleme mit freien Rändern	78
3.5.6	Die Parametrisierung nach Peterson	80

4	Undulationstheorie	84
4.1	Was ist Undulationstheorie?	85
4.1.1	Der harmonische Kristall	86
4.1.2	Membranfluktuationen um die Gleichgewichtsform	88
4.2	Ein einfacher Weg zum Energiefunktional	92
4.3	Die fast flache Membran	96
4.3.1	Das Energiefunktional	96
4.3.2	Fluktuationen	99
4.4	Kovariante Differentialgeometrie	101
4.4.1	Die kovariante Ableitung	102
4.4.2	Zwei Lemmata über Christoffel-Symbole	107
4.4.3	Gradient, Divergenz, Laplace-Beltrami Operator	108
4.4.4	Geometrische Interpretation des Laplace-Beltrami Operators	111
4.5	Das allgemeine Variationsproblem	114
4.5.1	Die erste Variation: Gleichgewichtsformen	115
4.5.2	Die zweite Variation: Elementaranregungen	118
4.5.3	Die zweite Variation der Energie	122
4.5.4	Fluktuationen	123
4.5.5	Beispiele	124

Kapitel 1

Einführendes über Membranen

Membranen sind essentielle Bestandteile aller Zellen. Prokariotische Zellen — das sind die ersten in der Evolution aufgetretenen Zellen (z.B. Bakterien) — besitzen wenige, eukariotische — das sind die Zellen aller höheren Organismen wie Pflanzen und Tiere — eine Reihe von Membrantypen: die Plasma-Membran, welche das gesamte Zytoplasma der Zelle umschließt, und die Membranen, die mit den Organellen assoziiert sind. Alle diese Membranen haben im wesentlichen vier Funktionen:

- i) Sie stellen die physikalischen Grenzen von Räumen dar, in denen ein bestimmtes chemisches Ambiente aufrechterhalten werden soll, um effizientes Ablaufen biochemischer Prozesse zu gewährleisten.
- ii) Sie sind selektiv permeabel für eine Reihe von Molekülen.
- iii) Sie fungieren als Schnittstelle zur Übertragung chemischer Signale.
- iv) Sie stellen die optimale Umgebung dar für das Funktionieren einer Menge von Proteinen (z. B. Enzyme, Ionen-Pumpen, Rezeptoren), welche wiederum für die unter ii) und iii) genannten Leistungen verantwortlich sind.

Entsprechend gibt es eine Grundstruktur, die sich bei allen biologischen Membranen findet. So bestehen alle Membranen aus einer Lipid-Doppelschicht, in die Proteine eingelassen (*integrale Proteine*) oder an die Proteine adsorbiert (*periphere Proteine*) sind; siehe Abbildung 1.1. Die Proteine sind gewissermaßen in der Lipid-Doppelschicht gelöst. Dieses Modell für die Grundstruktur aller biologischen Membranen bezeichnet man als *Flüssig-Mosaik-Modell* [*fluid mosaic model*, S.J. Singer & G.L. Nicolson, *Science* **173** (1972), 720-731].

Die Art der Lipide und die der Proteine und ebenso ihre Anteile an der Masse der Membran variiert mit dem Membran-Typ. Grundsätzlich aber ist die wesentliche Eigenschaft der Lipide ihre *Ambivalenz*, d.h. sie besitzen einen *hydrophilen* (Wasser „liebenden“ oder polaren) und einen *hydrophoben* (Wasser „fürchtenden“ oder unpolaren) Teil; siehe Abbildung 1.2. Die

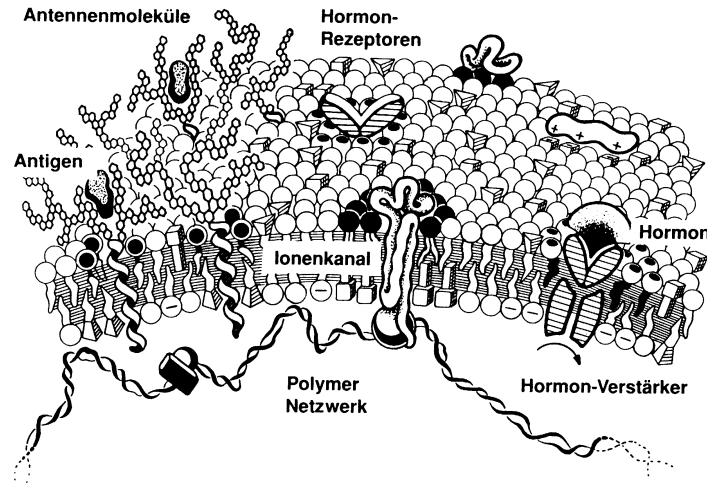


Abb. 1.1: Querschnitt durch ein typisches Stück einer biologischen Membran, einer Lipid-Doppelschicht. Die Wasser-liebenden polaren Kopfgruppen (rund) sind außen, die hydrophoben Kohlenwasserstoff-Ketten sind im Innern der Lipid-Doppelschicht. Die an der Doppelschicht adsorbierten, in sie eingelassenen oder sie durchdringenden Makromoleküle sind Membran-Proteine, welche für die Zelle lebenswichtige Funktionen erfüllen.

bei weitem häufigsten Lipide sind Phospholipide und Glycolipide. Glycolipide kommen stets nur in der dem Zytoplasma abgewandten Monoschicht vor, und auch bzgl. der Verteilung bzw. der Orientierung (bei Transproteinen, d.h. Proteinen, welche die Lipid-Doppelschicht ganz durchdringen, siehe Abbildung 1.1) der Proteine ist eine Membran asymmetrisch aufgebaut, was freilich ihrer funktionellen Asymmetrie entspricht.

Der Transport von Stoffen durch Membranen wird im Fall von kleinen Molekülen durch Membran-Proteine vermittelt (polare Kanäle, Ionen-Pumpen,...). Für Makromoleküle und sogar kleine Partikel existiert eine völlig andere Strategie: Membranen übertragen sie durch sogenannte *Exo-* bzw. *Endocytose*, bei der intrazelluläre Stoffe in Membran-umschlossenen Abteilen, den *Vesikeln*, zur Zell-Oberfläche wandern um dort durch das Verschmelzen der Vesikel- mit der Zellmembran in den extrazellulären Raum ausgeschüttet zu werden (siehe Abbildung 1.4 für die Exozytose von Neuro-Transmittern in den synaptischen Spalt einer chemischen Synapse), bzw. extrazelluläre Stoffe von Einstülpungen der Zellmembran eingeschlossen, von der Zellmembran in Vesikelform abgelöst und ins Innere der Zelle transportiert werden.

Das Massenverhältnis Lipide/Proteine schwankt zwischen 4/1 (Myelin) und 1/3 (Mitochondrien), liegt aber häufig um 1/1. Da Proteine viel schwerer sind als Lipide bedeutet das einen molekularen Überschuß an Lipiden von etwa 50/1.

Es ist daher klar, dass die Grundstruktur einer Membran stark von den Strukturbildungseigenschaften der Lipide abhängt. Die treibende Kraft bei der Anordnung von Lipiden in Wasser liefert der *hydrophobe* Effekt: Die ambivalente Natur der Lipide und die polare Na-

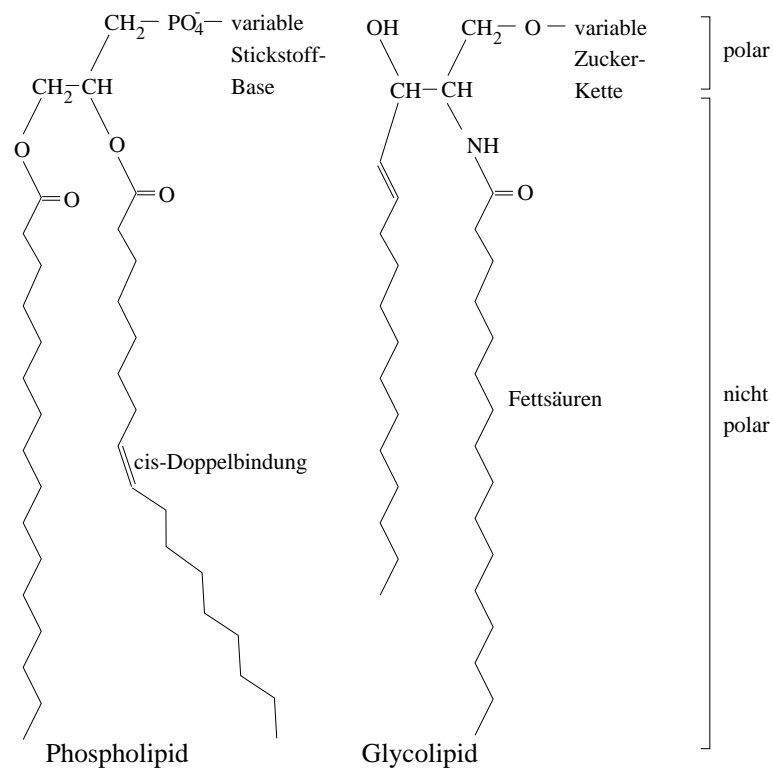


Abb. 1.2: Die in biologischen Membranen häufigsten Lipid-Klassen. Die polaren hydrophilen Kopf-Gruppen sind außen im Wasser, das bis zur Esterbindung (=O) kommt. Cis-Doppelbindungen verursachen 'Kinks' in den Kohlenwasserstoff-Ketten.

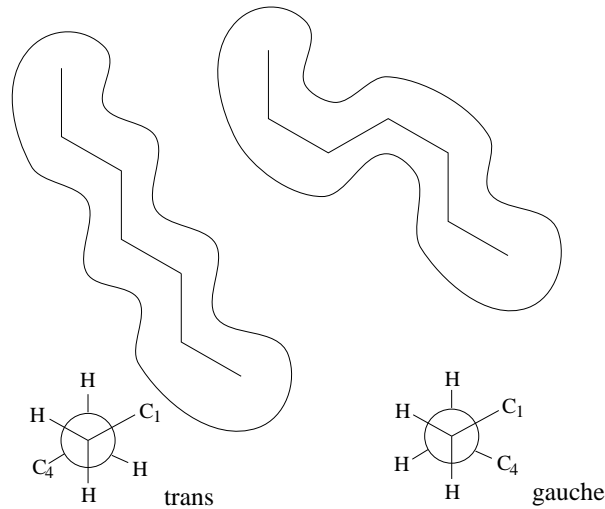


Abb. 1.3: Kohlenwasserstoff-Kette in all-trans Konfiguration und mit zwei gauche Konformationen hintereinander, die einen *Kink* erzeugen und die Kette ein wenig verkürzen ($\Delta L \approx 1.3\text{\AA}$). Auf diese Weise entstehen Hohlräume im hydrophoben Bereich der Membran. Die kurvige Kontur soll das Volumen der Ketten andeuten. Gezeigt sind auch die Newman-Projektionen von trans und gauche Konformation. Die Newman-Projektionen zeigen die Ansicht entlang einer C-C-Bindung. Das eine C-Atom ist durch einen Punkt, seine Seitenbindungen durch von ihm ausgehende Strahlen symbolisiert. Das andere C-Atom ist durch einen Kreis, seine Seitenbindungen wieder durch von ihm ausgehende Strahlen symbolisiert. Daraus ist zu ersehen, dass sich trans und gauche Konformation durch eine 120 Grad Drehung um die C-C-Bindung unterscheiden.

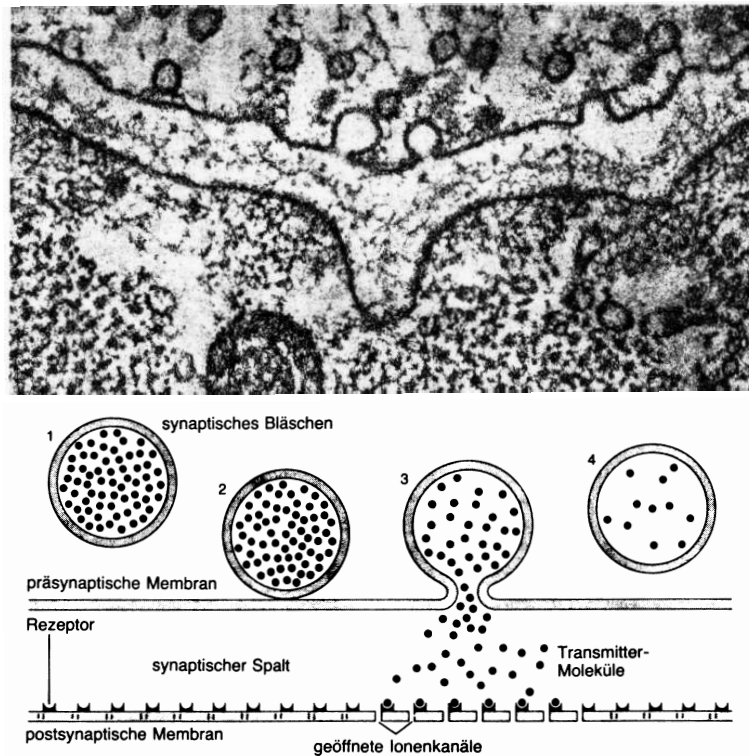


Abb. 1.4: Exocytose von Neurotransmittern nach elektrischer Erregung einer chemischen Synapse in einer elektronenmikroskopischen Aufnahme und im Schema. Jeweils im oberen Bildteil sieht man das praesynaptische Terminal, dann den synaptischen Spalt, durch den der Transmitter extrazellulär diffundiert, bevor er die Rezeptoren auf der Membran der postsynaptischen Zelle erreicht.

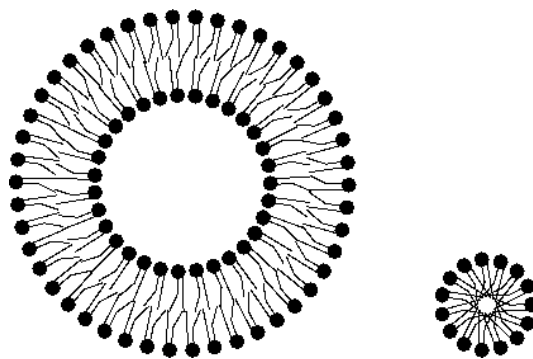


Abb. 1.5: Zwei der Formen spontaner Anordnung von Lipiden in Wasser, dargestellt in einer Schnittebene. Die Konfiguration ist jeweils so, dass die polaren Köpfe die unpolaren Schwänze vom Wasser abschirmen. Links: sphärisches Vesikel. Rechts: Mizelle (stets sphärisch).

tur des Wassers bewirken eine anziehende Wechselwirkung zwischen den Lipid-Molekülen, sie ordnen sich im Wasser spontan so an, dass ihre hydrophoben Schwänze durch ihre hydrophilen Köpfe vom Wasser abgeschirmt sind. Es gibt, abhängig von der Temperatur und der Lipid-Konzentration, aber auch von der Art des Lipids, eine ganze Reihe von Konformationen, die angenommen werden können. Bei hinreichend viel Wasser und für biologisch relevante Lipide findet spontane Assoziation zu einer geschlossenen Doppelschicht statt (*Vesikel*), die man als einfaches Modell einer Membran ansehen kann; siehe Abbildung 1.5. Eine weitere, unter anderen Bedingungen realisierte Form ist beispielsweise die der Mizelle.

Der prominenteste thermische Phasenübergang in einer homogenen Lipid-Doppelschicht ist der *Flüssig-Kristallin(Gel)-Übergang*. Die kritische Temperatur ist z.B. für das Lipid Dipalmitoyllecithin $T_c \approx 42^\circ\text{C}$. Die Umwandlungsenthalpie beträgt $\Delta H \approx 0.5 \text{ kcal/CH}_2$ -Gruppe, die Umwandlungsentropie $\Delta S \approx 1.3 \text{ cal/Grad und Mol CH}_2$. Auch die folgenden Daten beziehen sich auf dieses Lipid; sie sind recht typisch.

- Oberhalb von T_c , in der sogenannten *flüssigen Phase*, ist der mittlere Kettenabstand ca. 0.53 nm und die Dicke der Doppelschicht ist etwa 4.1 nm. Die Lipid-Moleküle sind innerhalb ihrer Monoschicht sehr beweglich: es finden ca. 10^7 Platzwechsel pro Sekunde und Molekül mit den jeweiligen Nachbarn statt. Das entspricht einem lateralen Diffusionskoeffizienten von etwa $10^{-8} \text{ cm}^2/\text{s}$ und bedeutet, dass ein durchschnittliches Lipid-Molekül die Länge einer großen Bakterie (ca. $2 \mu\text{m}$) in ungefähr einer Sekunde zurücklegt. Wechsel von Lipiden von einer Monoschicht in die andere (*flip-flops*) finden dagegen nur selten statt: weniger als einmal im Monat für ein individuelles Lipid-Molekül. Diese geringe Rate ist auch notwendig zur Aufrechterhaltung der Lipid-Asymmetrie zwischen den beiden Schichten. Darüberhinaus rotieren Lipide noch recht schnell um ihre Längsachse und zeigen spontane Biegung ihrer Kohlenwasserstoff-Ketten, was mit Trans-Gauche-Übergängen zu tun hat; siehe Abbildung 1.3. Diese Biegsamkeit ist im Zentrum der Doppelschicht am größten. Dadurch entstehen Hohlräume im hydrophoben Bereich, die kleine Fremdstoff-Moleküle aufnehmen können. Diese wandern dann schnell in Kettenrichtung (also transversal zur Membran-Fläche), getrieben von den Sprüngen der Kinks (ca. 10^{10} s^{-1}). Zusammenfassend kann man sagen, dass in der flüssigen Phase erhebliche laterale und transversale Diffusion stattfindet. Die Doppellipidschicht verhält sich wie eine 2D-Flüssigkeit, in der einige Stoffe gelöst sind, insbesondere die Membran-Proteine. Diese Eigenschaften sind freilich wichtig für die biologischen Funktionen.
- Unterhalb von T_c , in der sogenannten *kristallinen* oder *Gel-Phase*, sind die Ketten in einer regelmäßigen Dreiecks- oder Hexagonal-Struktur angeordnet, und der mittlere Kettenabstand ist verringert auf ca. 0.49 nm, die Dicke der Doppelschicht nimmt auf 4.6 nm zu. Das entspricht einer relativen Volumenverringerung $\Delta V/V \approx 0.01$. Die Beweglichkeit der Lipide ist nur gering.

Die kritische Temperatur T_c hängt stark ab von der Kopf-Gruppe der Lipide und der Struktur der Kohlenwasserstoff-Ketten. Je ungesättigter letztere sind (d. h. je mehr cis-Doppelbindungen auftreten), desto schlechter lassen sie sich packen, ihre Beweglichkeit vergrößert sich also. Außerdem ist die Wechselwirkung zwischen kurzen Ketten geringer als zwischen langen. Ihre Beweglichkeit hängt ebenfalls ab von dem Gehalt an *Cholesterin* in der Membran.

Cholesterin ist ein vergleichsweise starres und hydrophobes Molekül, das im Bereich der Fettsäureketten in die Membran eingebaut wird. Es unterdrückt die Bildung von Kettendefekten und verringert so das freie Volumen in der Membran. Dies wird auch als der “kondensierende Effekt” bezeichnet. Andererseits stört Cholesterin die kristalline Packung der Fettsäureketten in der Gel-Phase, so dass die Phasenumwandlung der Lipide bei höherem Cholesterin-Gehalt vollkommen unterdrückt wird. Cholesterin beeinflusst auch die mechanischen Eigenschaften der Membran direkt, indem es die mechanische Stabilität erhöht und Kompressibilität, thermische Ausdehnung und Permeabilität für Wasser reduziert. Eukariotische Plasma-Membranen zum Beispiel haben einen hohen Cholesterin-Gehalt, bis zu einem Cholesterin-Molekül auf jedes Phospholipid.

Bei Lipid-Mischungen, wie sie in biologischen Membranen vorliegen, kann es aufgrund des unterschiedlichen Übergangsverhaltens der einzelnen Komponenten zur Phasendissoziation, d.h. zur räumlich getrennten Koexistenz verschiedener Phasen, kommen. In biologischen Membranen sind jedoch in der Regel eine ungesättigte und eine gesättigte Kohlenwasserstoff-Kette in einem Lipid kombiniert, so dass solche Phasendissoziationen unwahrscheinlich sind.

Thema dieser Vorlesung ist die Berechnung der Form von Vesikeln aus einfachen Annahmen über deren mechanische Eigenschaften. Es handelt sich um eine phänomenologische Theorie, in welcher der zelluläre Aufbau nur indirekt eine Rolle spielt. Die Oberflächen von Vesikeln können einfache oder deformierte Sphären bilden oder auch mit Löchern versehen sein; siehe Abbildung 1.6. Die Abbildungen 1.7 und 1.8 geben Beispiele von Form-Transformationen von Vesikeln, induziert durch Temperaturänderung bzw. Änderung ihrer Oberfläche durch Kontakt mit einer anderen, planaren Oberfläche. In beiden Abbildungen werden Experiment und Theorie gegenübergestellt, die Konturen sind theoretisch.

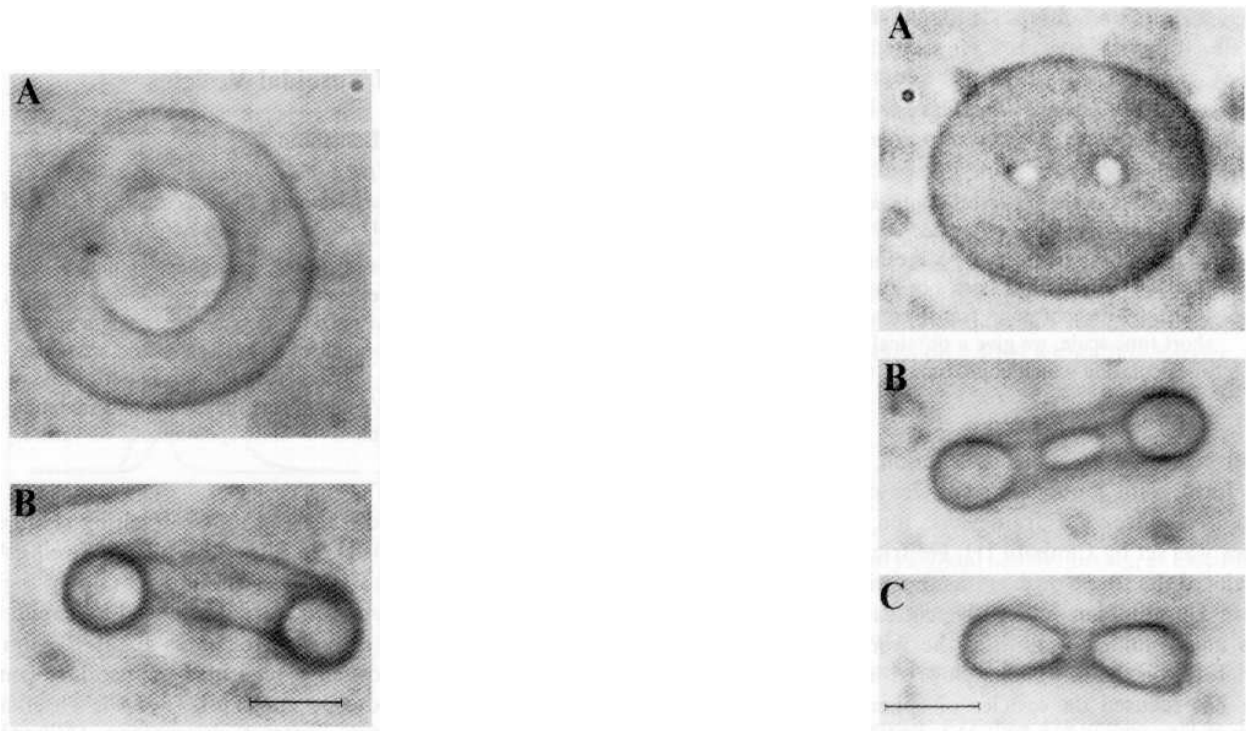


Abb. 1.6: Links: Zwei Ansichten eines toroidalen Vesikels. A: von oben. B: von der Seite. Rechts: Drei Ansichten eines Vesikels mit zwei Löchern. A: von oben. B: von der Seite, geschnitten durch die beiden Löcher. C: von der Seite, geschnitten senkrecht zur Achse durch beide Löcher. Der Balken mißt jeweils $10\ \mu\text{m}$. Aus B. Fourcade, M. Mutz, D. Bensimon, *Phys. Rev. Lett.* **68** (1992), 2551-2554.

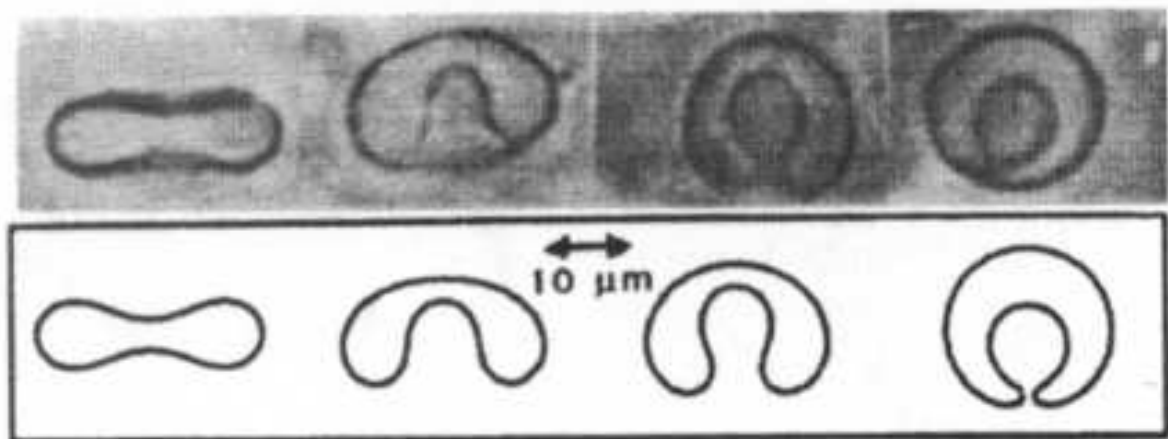


Abb. 1.7: Discocyt-Stomatocyt-Übergang. Von links nach rechts steigt die Temperatur: 43.8 , 43.9 , 44.0 , 44.1°C . Unten sind die entsprechenden aus der Theorie folgenden stationären Zustände gezeigt. Aus K. Berndl, J. Käs, R. Lipowsky, E. Sackmann & U. Seifert, *Europhys. Lett.* **13** (1990) 659-664

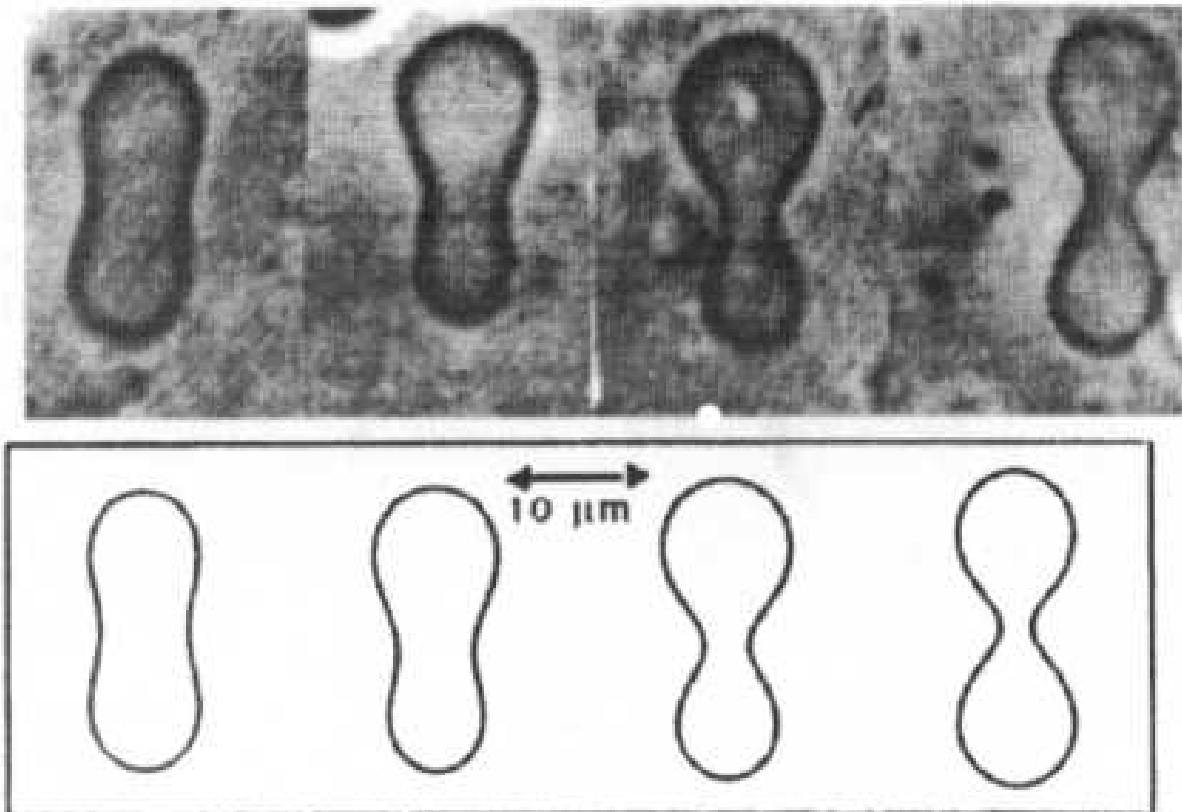


Abb. 1.8: Reentrant-Übergang. Von links nach rechts steigt die Temperatur: 20.7, 32.6, 40.0, 44.3°C. Die theoretischen Umriss (unten) sind Ergebnisse auf Grundlage des Bilayer-Coupling-Modells. Aus K. Berndl, J. Käs, R. Lipowsky, E. Sackmann & U. Seifert, *Europhys. Lett.* **13** (1990) 659–664

Weiterführende Literatur:

- Biochemie der Zelle
Alberts et al., *Molecular Biology of the Cell*
- Membranmechanik
E.A. Evans & R. Skalak, *Mechanics and Thermodynamics of Biomembranes*, CRC Press, Boca Raton, FL (1980)
- Zur Theorie der Lipidketten-Hauptumwandlung
F. Jähnig, *Mol. Cryst. Liq. Cryst.* **63** (1981) 157–170, *Biophys. J.* **36** (1981) 329–357
- Zur Theorie der Vesikel-Formen
R. Lipowsky, *Nature* **349** (1991) 475–481, eine elegante knappe Darstellung.
U. Seifert, *Adv. Phys.* **46** (1997) 13–137, eine hervorragende Übersicht.
R. Lipowsky & E. Sackmann, Editors, *Structure and Dynamics of Membranes: From Cells to Vesicles*. Handbook of Biological Physics, Vol. 1, Elsevier, Amsterdam (1995)

Kapitel 2

Einführung in die Differentialgeometrie

Literatur:

- D.J. STRUIK
Lectures on Classical Differential Geometry, 2nd edition
Addison-Wesley, Reading, MA (1961) und Dover, New York (1988)
- W. BLASCHKE
Vorlesungen über Differentialgeometrie I, 4. Auflage
Springer, Berlin (1945)
- M. SPIVAK
Comprehensive Introduction to Differential Geometry, Vols. I-V, 2nd edition
Publish or Perish, Houston, TX (1979)
- J.J. STOKER
Differential Geometry, Wiley, New York (1969) ist in der Reihe ‘Wiley Classics Library’
1989 wieder aufgelegt worden. Das Buch ist ein Klassiker, der sich eingehend mit 2-
dimensionalen Mannigfaltigkeiten in \mathbb{R}^3 beschäftigt.
- T.J. WILLMORE
An Introduction to Differential Geometry, Clarendon Press, Oxford (1959) ist auch ein
herausragender Klassiker, der sich ebenfalls eingehend mit 2-dimensionalen Mannig-
faltigkeiten in \mathbb{R}^3 befasst aber zur selben Zeit eine klare Perspektive in Richtung der
“modernen” Differentialgeometrie aufzeigt.
- D. HILBERT & S. COHN-VOSSEN
Anschauliche Geometrie
Springer, Berlin (1932) Kap. IV; eine 2. Auflage erschien 1996. Ein inspirierendes Buch,
in dem die der klassischen Differentialgeometrie zugrundeliegende Intuition hervor-
ragend dargestellt wird.

- J. JOST

Differentialgeometrie und Minimalflächen, Springer, Berlin (1994), eine elegante Ergänzung der hiesigen Betrachtungen.

- M.P. DO CARMO

Differentialgeometrie von Kurven und Flächen, 3. Auflage

Vieweg, Braunschweig (1993), eine klare Einführung mit guten Bildern, die sich auf \mathbb{R}^3 spezialisiert, dabei jedoch Struik meistens den Vortritt lassen muss.

Ziel dieses Kapitels ist es, die benötigten Elemente der Differentialgeometrie in einer „klassischen“ Art, d. h. anschaulich und konkret, bereit zu stellen.

Die Differentialgeometrie wird im dritten Kapitel zur Beschreibung der Membranform gebraucht. Sie kann jedoch an vielen anderen Stellen sehr vorteilhaft angewendet werden, wie z. B. in der allgemeinen Relativitätstheorie und bei der Analyse der Informationsverarbeitung im primären visuellen Cortex als Abbild der Retina. Siehe zum Letzteren *Solid Shape* von Jan J. Koenderink (MIT Press, Cambridge, MA, 1990). Hier findet man auch zusätzliche Information zur Differentialgeometrie.

Die beiden Bücher von Blaschke und Struik¹ sind klassische Einführungen – Blaschke außerordentlich schön und Struik mehr nach unserem Schnitt –, die auch Interessantes zur reichen Geschichte der Differentialgeometrie erwähnen. Die fünfbandige Arbeit von Spivak ist eine mitreißende Abhandlung zur Frage, wie die moderne Differentialgeometrie sich im Laufe ihrer Geschichte zu ihrer jetzigen, so viel abstrakteren Form entwickelt hat. Die ersten beiden Bände sind zu unseren Zwecken sehr zu empfehlen.

Zur Notation: Es wird die übliche Summenkonvention verwendet, d. h. über zwei gleiche Indizes, von denen der eine ein unterer, der andere ein oberer ist, wird summiert, z. B.:

$$a_\lambda b^\lambda \equiv \sum_\lambda a_\lambda b^\lambda.$$

Die tiefere Bedeutung unterer und oberer Indizes sowie der Summation über dieselben ist noch zu erklären. Ferner wird der Punkt beim Skalarprodukt zwischen zwei Vektoren weggelassen:

$$\mathbf{x}\mathbf{y} \equiv \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} \quad \text{für} \quad \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^n.$$

Gelegentlich wird die Dirac-Notation verwendet, wobei dann etwa der Vektor \mathbf{u} vorübergehend mit $|\mathbf{u}\rangle$ bezeichnet wird und das zugehörige Skalarprodukt mit $\langle \mathbf{u}|\mathbf{v}\rangle$.

Im Folgenden sei \mathcal{H} ein reeller, endlich-dimensionaler Vektorraum mit Skalarprodukt und davon induzierter Norm $\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\mathbf{x}\mathbf{x}}$.

¹Dirk Jan Struik (geboren 1894 in Rotterdam, 1926 von Wiener zum MIT geholt), der 1994 in bester Verfassung hundert Jahre alt geworden ist und auf einem Symposium zu seinen Ehren in Amsterdam putzmunter selbst den Schlußvortrag gehalten hat, ist im Jahre 2000 kurz nach seinem 106. Geburtstag verstorben.

Wir führen zunächst einige Grundbegriffe ein und wenden uns dann (ab Abschnitt 2.6) der eigentlichen Differentialgeometrie zu.

2.1 Die Gram-Matrix

Definition 2.1 Seien \mathbf{x}_κ für $1 \leq \kappa \leq n$ Vektoren aus \mathcal{H} . Die Matrix $(\mathbf{x}_\lambda \mathbf{x}_\mu)$ heißt Gram-Matrix, ihre Determinante $\det(\mathbf{x}_\lambda \mathbf{x}_\mu)$ heißt Gram-Determinante.

Notwendig und hinreichend dafür, dass die \mathbf{x}_κ linear abhängig sind, ist $\det(\mathbf{x}_\lambda \mathbf{x}_\mu) = 0$.

Beweis:

- Seien die \mathbf{x}_κ abhängig; es existieren also $a^\mu \in \mathbb{R}$, die nicht alle gleich Null sind, mit

$$a^\mu \mathbf{x}_\mu = 0 \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{x}_\lambda \mathbf{x}_\mu) a^\mu = 0 \quad \stackrel{(a^\mu) \neq 0}{\Rightarrow} \quad \det(\mathbf{x}_\lambda \mathbf{x}_\mu) = 0.$$

- Sei $\det(\mathbf{x}_\lambda \mathbf{x}_\mu) = 0$, es existieren also $a^\mu \in \mathbb{R}$, die nicht alle gleich Null sind, mit

$$\begin{aligned} (\mathbf{x}_\lambda \mathbf{x}_\mu) a^\mu = 0 &\Rightarrow (\mathbf{x}_\lambda \mathbf{x}_\mu)(a^\lambda a^\mu) = 0 \Rightarrow (\mathbf{x}_\lambda a^\lambda)(\mathbf{x}_\mu a^\mu) = 0 \\ &\Rightarrow \|\mathbf{x}_\lambda a^\lambda\|^2 = 0 \Rightarrow \mathbf{x}_\lambda a^\lambda = 0. \blacksquare \end{aligned}$$

2.2 Orthogonale Projektion

Sei $\mathcal{H}_n \subseteq \mathcal{H}$ ein n -dimensionaler Unterraum von \mathcal{H} ($\dim \mathcal{H} \geq n$). Dann gibt es für jedes $\mathbf{x} \in \mathcal{H}$ genau einen Vektor $P\mathbf{x} \in \mathcal{H}_n$, so dass $(\mathbf{x} - P\mathbf{x}) \perp \mathcal{H}_n$.

Beweis:

- Eindeutigkeit: Seien \mathbf{y} und \mathbf{y}^* zwei Vektoren mit den Eigenschaften von $P\mathbf{x}$. Es gilt:

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + (\mathbf{x} - \mathbf{y}) = \mathbf{y}^* + (\mathbf{x} - \mathbf{y}^*) \quad \Rightarrow \quad \underbrace{\mathbf{y} - \mathbf{y}^*}_{\in \mathcal{H}_n} = \underbrace{(\mathbf{x} - \mathbf{y}^*) - (\mathbf{x} - \mathbf{y})}_{\perp \mathcal{H}_n}.$$

Durch Multiplikation mit $(\mathbf{y} - \mathbf{y}^*)$ ergibt sich:

$$\|\mathbf{y} - \mathbf{y}^*\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y} = \mathbf{y}^*.$$

- Existenz: Sei $\{\mathbf{x}_\kappa \mid \kappa = 1, \dots, n\}$ eine Basis von \mathcal{H}_n . Wir suchen einen Vektor $a^\mu \mathbf{x}_\mu$ mit

$$(\mathbf{x} - a^\mu \mathbf{x}_\mu) \mathbf{x}_\lambda = 0 \quad \text{für} \quad \lambda = 1, \dots, n.$$

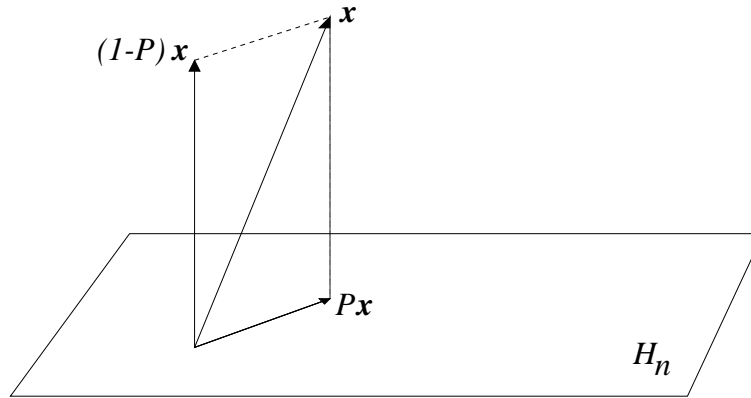


Abb. 2.1: Orthogonale Projektion

Dies ist aber nichts anderes, als das Gleichungssystem

$$\underbrace{(\mathbf{x}_\lambda \mathbf{x}_\mu)}_{\text{Gram}} a^\mu = \mathbf{x}_\lambda \mathbf{x}.$$

Die Gram-Matrix zu der Basis von \mathcal{H}_n ist natürlich invertierbar, d. h. das System hat eine — eindeutige — Lösung² (a^μ). ■

Abbildungung 2.1 veranschaulicht die Verhältnisse im $\mathcal{H} = \mathbb{R}^3$ mit $n = 2$. Dieses Ergebnis berechtigt uns zu der

Definition 2.2 Der Vektor $P\mathbf{x}$ heißt die orthogonale Projektion von \mathbf{x} auf \mathcal{H}_n .

Es läßt sich aus obigem Beweis, bzw. der Eindeutigkeit, auch leicht einsehen, dass der Operator P (der *Projektor*) linear ist.

2.3 Reziproke Basis und metrischer Tensor

Zu jeder Basis $\{\mathbf{x}_\kappa \mid \kappa = 1, \dots, n\}$ in einem n -dimensionalen Raum \mathcal{H}_n gehört eine eindeutig bestimmte zweite Basis $\{\mathbf{x}^\kappa \mid \kappa = 1, \dots, n\}$ desselben Raumes, so dass

$$\mathbf{x}_\lambda \mathbf{x}^\mu = \delta_\lambda^\mu. \quad (2.1)$$

Dabei ist δ_λ^μ das Kronecker Delta. Umgekehrt ist aus der zweiten Basis mit (2.1) eindeutig die erste bestimmt. Man nennt die beiden Basen daher zueinander *reziprok*.

Beweis: Zur Konstruktion entferne man einen Vektor \mathbf{x}_λ aus der Basis von \mathcal{H}_n : $\{\mathbf{x}_\kappa \mid \kappa = 1, \dots, \lambda - 1, \lambda + 1, \dots, n\}$ spanne den $(n - 1)$ -dimensionalen Raum $\mathcal{H}_{n-1} \subset \mathcal{H}_n$ auf. Ferner gelte $P_\lambda \mathcal{H}_n = \mathcal{H}_{n-1}$, wo P_λ orthogonal auf \mathcal{H}_{n-1} projiziert. Für $\mathbf{y} := \mathbf{x}_\lambda - P_\lambda \mathbf{x}_\lambda$ gilt:

²Dieses Argument führt also auf Existenz und Eindeutigkeit.

- $\mathbf{y} \neq 0$, da $\{\mathbf{x}_\kappa \mid \kappa = 1, \dots, n\}$ nach Voraussetzung eine Basis von ganz \mathcal{H}_n ist. Folglich ist

$$0 < \mathbf{y}\mathbf{y} = \mathbf{y}\mathbf{x}_\lambda,$$

und es gibt daher $\mathbf{y}^* := (\mathbf{y}\mathbf{y})^{-1}\mathbf{y}$ mit

$$\mathbf{y}^*\mathbf{x}_\lambda = 1.$$

- $\mathbf{y} \perp \mathcal{H}_{n-1}$ nach Definition. Dasselbe gilt also für \mathbf{y}^* und somit können wir $\mathbf{x}^\lambda = \mathbf{y}^*$ setzen.

Diese Prozedur läßt sich der Reihe nach für alle $\lambda \in \{1, \dots, n\}$ durchführen, wodurch sämtliche \mathbf{x}^λ konstruiert werden. Wir müssen jetzt noch zeigen, dass die $\{\mathbf{x}^\lambda \mid \lambda = 1, \dots, n\}$ wieder eine Basis bilden. Dies folgt direkt aus ihrer definierenden Eigenschaft (2.1). Sei nämlich $\mathbf{x}^\mu a_\mu = 0$. Dann gilt $\mathbf{x}_\lambda(\mathbf{x}^\mu a_\mu) = a_\lambda = 0$ für $1 \leq \lambda \leq n$.

Die Basis $\{\mathbf{x}^\kappa \mid \kappa = 1, \dots, n\}$ ist bei gegebenem $\{\mathbf{x}_\kappa \mid \kappa = 1, \dots, n\}$ eindeutig, da sich für eine weitere Basis $\{\bar{\mathbf{x}}^\kappa \mid \kappa = 1, \dots, n\}$ mit den gleichen Eigenschaften schreiben läßt (λ fest):

$$\mathbf{x}^\kappa - \bar{\mathbf{x}}^\kappa =: a_\mu \mathbf{x}^\mu \Rightarrow 0 = \mathbf{x}^\lambda(\mathbf{x}^\kappa - \bar{\mathbf{x}}^\kappa) = \mathbf{x}^\lambda(a_\mu \mathbf{x}^\mu) = a_\lambda. \blacksquare$$

Man kann natürlich die eine Basis durch die andere ausdrücken:

$$\mathbf{x}_\lambda =: \mathbf{x}^\mu g_{\mu\lambda}. \quad (2.2)$$

Die so definierten Koeffizienten $g_{\mu\lambda}$ bilden den *metrischen Tensor*. Der Begriff des *Tensors* wird allgemein in Abschnitt 2.5 eingeführt. Der metrische Tensor hat die Form einer Gram-Matrix:

$$\mathbf{x}_\kappa \mathbf{x}_\lambda = \mathbf{x}_\kappa \mathbf{x}^\mu g_{\mu\lambda} = \delta_\kappa^\mu g_{\mu\lambda} = g_{\kappa\lambda}. \quad (2.3)$$

Insbesondere gilt $g_{\kappa\lambda} = g_{\lambda\kappa}$. Ganz analog kann man definieren

$$\mathbf{x}^\mu =: \mathbf{x}_\lambda g^{\lambda\mu}, \quad (2.4)$$

und es gilt dann wieder:

$$g^{\lambda\mu} = \mathbf{x}^\lambda \mathbf{x}^\mu = \mathbf{x}^\mu \mathbf{x}^\lambda = g^{\mu\lambda}. \quad (2.5)$$

Die Matrizen $(g_{\lambda\mu})$ und $(g^{\lambda\mu})$ sind invers zueinander:

$$\delta_\lambda^\mu = \mathbf{x}_\lambda \mathbf{x}^\mu = \mathbf{x}_\lambda \mathbf{x}_\kappa g^{\kappa\mu} = g_{\lambda\kappa} g^{\kappa\mu}. \quad (2.6)$$

Ferner sind beide *positiv-definit*, d. h. sie sind symmetrisch und für jeden Koordinatenvektor $(a^\mu) \neq 0$ ist

$$a^\lambda g_{\lambda\mu} a^\mu > 0; \quad (2.7)$$

entsprechend für $(g^{\lambda\mu})$. Dies ist wegen (2.3) bzw. (2.5) evident:

$$a^\lambda g_{\lambda\mu} a^\mu = \|a^\mu \mathbf{x}_\mu\|^2 > 0.$$

Eine zu (2.7) äquivalente Feststellung ist, dass alle Eigenwerte von $(g_{\lambda\mu})$ — und damit auch von $(g^{\lambda\mu})$ — strikt positiv sind³.

Für jeden Vektor $\mathbf{a} \in \mathcal{H}$ läßt sich natürlich schreiben

$$\mathbf{a} = a^\kappa \mathbf{x}_\kappa = a_\kappa \mathbf{x}^\kappa, \quad (2.8)$$

mit (a^κ) und (a_κ) als Komponenten des Vektors \mathbf{a} bzgl. $\{\mathbf{x}_\kappa\}$ bzw. $\{\mathbf{x}^\kappa\}$. Es gilt

i) für die Beziehung zwischen den Komponenten:

$$\begin{aligned} a^\mu &= a_\lambda g^{\lambda\mu}, \\ a_\lambda &= a^\mu g_{\mu\lambda}. \end{aligned} \quad (2.9)$$

ii) für das Skalarprodukt zwischen \mathbf{a} und einem Vektor $\mathbf{b} = b^\kappa \mathbf{x}_\kappa = b_\kappa \mathbf{x}^\kappa$:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = a^\lambda g_{\lambda\mu} b^\mu = a^\kappa b_\kappa = a_\lambda g^{\lambda\mu} b_\mu. \quad (2.10)$$

Diese Eigenschaft des metrischen Tensors, seine Beziehung zu Längen bzw. Abständen, motiviert seine Bezeichnung. Er „mißt“ Abstände bzgl. einer gewählten — i. A. nicht orthonormalen — Basis; siehe auch Unterabschnitt 2.8.1.

Beweis:

i) Dank der Definition von $g^{\kappa\lambda}$ ist

$$\mathbf{a} = \mathbf{x}_\kappa a^\kappa = \mathbf{x}^\lambda a_\lambda = \mathbf{x}_\kappa g^{\kappa\lambda} a_\lambda.$$

Die erste der Behauptungen (2.9) folgt nun durch Koeffizientenvergleich. Analog folgt auch die zweite.

ii) Es gilt der Definition eines Skalarproduktes nach:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = (a^\kappa \mathbf{x}_\kappa)(b_\lambda \mathbf{x}^\lambda) = a^\kappa b_\lambda (\mathbf{x}_\kappa \mathbf{x}^\lambda) = a^\kappa b_\lambda \delta_\kappa^\lambda = a^\kappa b_\kappa. \blacksquare$$

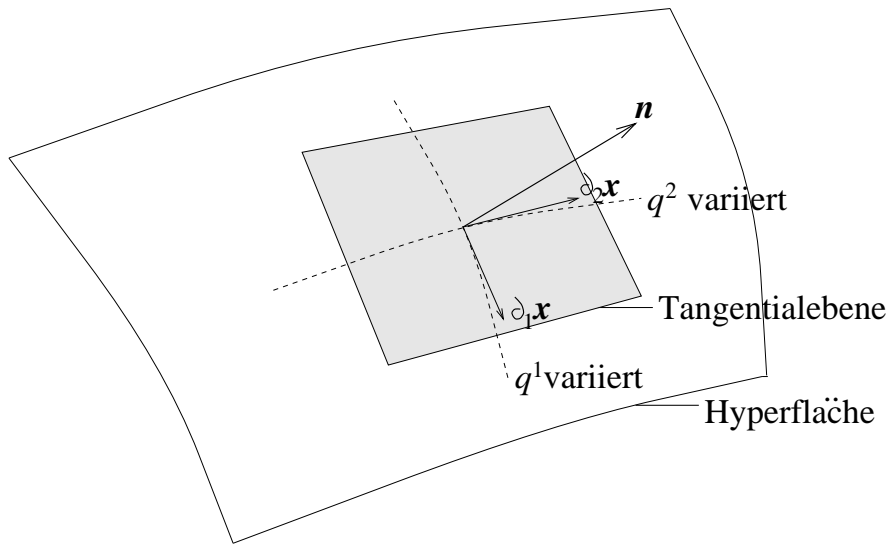


Abb. 2.2: Zwei-dimensionale Hyperfläche \mathcal{M} und deren Tangentialraum, eine Ebene, in $\mathbf{x} \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^3$. Die Tangentialebene in \mathbf{x} wird aufgespannt von $\partial_1 \mathbf{x}$ und $\partial_2 \mathbf{x}$. Der Normalenvektor \mathbf{n} ist orthogonal zum Tangentialraum in \mathbf{x} .

2.4 Hyperflächen, Tangentialräume und Normalenvektoren

Hyperflächen sind n -dimensionale Mannigfaltigkeiten⁴ im $(n + 1)$ -dimensionalen euklidischen Raum $\mathcal{H} = \mathbb{R}^{n+1}$. Dem entsprechen unsere 2-dimensionale Membranen im 3-dimensionalen Raum.

Wir parametrisieren die Vektoren $\mathbf{x} \in \mathcal{M} \subset \mathcal{H}$ auf der Hyperfläche \mathcal{M} lokal durch die Parameter q^κ mit $1 \leq \kappa \leq n$. Hier ist \mathcal{M} das Kürzel für ‘manifold’. Das Tupel (q^κ) ist natürlich ein Vektor aus \mathbb{R}^n . Lokal wird \mathcal{M} dann dadurch charakterisiert, dass es eine zugehörige Abbildung f aus einer offenen Teilmenge $G \subset \mathbb{R}^n$ mit Bild $f(G)$ in $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}$ gibt:

$$\begin{aligned}
 f : \mathbb{R}^n \supset G &\longrightarrow f(G) \subset \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1} \\
 (q^\kappa) &\longrightarrow \mathbf{x}(q^\kappa) .
 \end{aligned}
 \tag{2.11}$$

³Diese Äquivalenz macht man sich am Schnellsten in der Spektraldarstellung von $(g_{\lambda\mu})$ klar, oder anhand jedes guten Lehrbuches über lineare Algebra, z. B. P.R. Halmos, *Finite-Dimensional Vector Spaces*, Ch. VIII, Van Nostrand, Princeton (1958); 2nd ed., Springer (1974).

⁴Der Begriff ‘Mannigfaltigkeit’ ist in der Mathematik wohldefiniert. Salopp gesagt, eine differenzierbare n -dimensionale Mannigfaltigkeit ist eine Fläche, die glatt ist und lokal eindeutig von n Parametern bestimmt wird. Für eine mathematisch klare Behandlung auf wenigen Seiten sei auf Kap. 1 von J.W. Milnor, *Topology from the Differentiable Point of View*, Princeton University Press (1997) verwiesen. Eine ausführlichere aber dennoch kurz gefasste Einführung, die alles Wesentliche enthält, ist *Mannigfaltigkeiten: Ein Steilkurs* von W. Ballmann, Bonn: <http://www.math.uni-bonn.de/people/ballmann/mfld.ps>

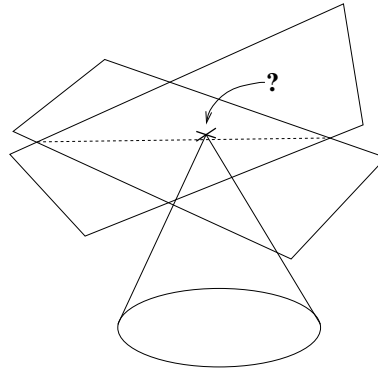


Abb. 2.3: Singulärer Punkt

Die Abbildung f soll invertierbar und stetig differenzierbar sein, gewöhnlich soll auch die Umkehrabbildung stetig differenzierbar sein (\rightarrow Diffeomorphismus). Sie heißt *Karte*. Die verschiedenen Karten sollten natürlich kompatibel sein und bilden damit einen ‘Atlas’, der die Mannigfaltigkeit \mathcal{M} beschreibt.

Die n Vektoren aus \mathcal{H}

$$\partial_\kappa \mathbf{x} \equiv \frac{\partial}{\partial q^\kappa} \mathbf{x}, \quad \kappa = 1, \dots, n \quad (2.12)$$

beschreiben die Tangentenrichtung im Punkt $\mathbf{x}(q^\kappa)$ an die Kurven

$$\mathbf{x}(\underbrace{\dots}_{\text{fest}}, q^\lambda, \underbrace{\dots}_{\text{fest}}), \quad \lambda = 1, \dots, n$$

auf \mathcal{M} , die durch Variation von q^λ durchlaufen werden; siehe Abbildung 2.2 für den Fall $n = 2$. Der Punkt $\mathbf{x}(q^\kappa)$ heißt *regulär*, wenn die $\{\partial_\kappa \mathbf{x} \mid \kappa = 1, \dots, n\}$ linear unabhängig sind, also einen Raum der Dimension n aufspannen. Dieser Raum heißt dann — aus naheliegenden Gründen — *Tangentialraum* oder *Tangentialebene* an die Hyperfläche im Punkt $\mathbf{x}(q^\kappa)$. In einem nicht-regulären Punkt wäre die Lage einer solchen Tangentialebene nicht eindeutig festzulegen; siehe Abbildung 2.3. Da es sich bei einer Tangentialebene um einen n -dimensionalen Unterraum eines $(n+1)$ -dimensionalen Raumes handelt (eine Hyperebene), gibt es dazu genau zwei Normalenrichtungen. Man kann also in jedem regulären Punkt der Hyperfläche zwei *Normalenvektoren* $\mathbf{n}(\mathbf{x}(q^\kappa))$ mit $\|\mathbf{n}\| = 1$ definieren (die sich um ein Vorzeichen unterscheiden); vgl. Abbildung 2.2. Genauer: Es existiert für reguläres $\mathbf{x}(q^\kappa)$ genau eine Richtung, aufgespannt von einem Vektor $\mathbf{n}(q^\kappa)$ mit $\mathbf{n}\mathbf{n} = 1$ und

$$\mathbf{n}\partial_\kappa \mathbf{x} = 0 \quad \text{für} \quad \kappa = 1, \dots, n. \quad (2.13)$$

Beweis: Sei $\{\mathbf{e}_h \mid h = 1, \dots, n+1\}$ eine Orthonormalbasis von \mathcal{H} , dann schreibt sich

$$\begin{aligned} \mathbf{n} &= \sum_{h=1}^{n+1} n_h \mathbf{e}_h, \\ \partial_\kappa \mathbf{x} &= \sum_{h=1}^{n+1} t_{\kappa,h} \mathbf{e}_h. \end{aligned}$$

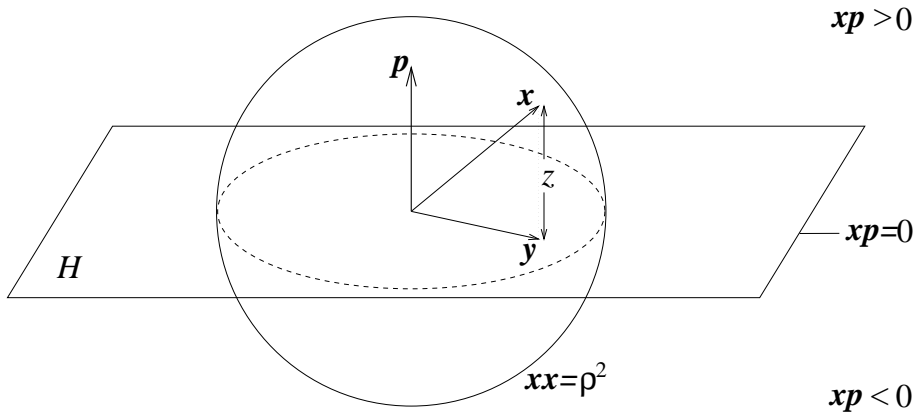


Abb. 2.4: Parametrisierung der Hypersphäre

Die Gleichungen (2.13) bedeuten nun

$$\sum_{h=1}^{n+1} n_h t_{\kappa,h} = 0 \quad \kappa = 1, \dots, n.$$

Da \mathbf{x} regulär war, besitzt die Matrix

$$\begin{pmatrix} t_{1,1} & \cdots & t_{1,n+1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ t_{n,1} & \cdots & t_{n,n+1} \end{pmatrix}$$

des Gleichungssystems den Rang n . Der Lösungsraum ist also eindimensional, und folglich gibt es auch (zwei) auf 1 normierte Lösungen \mathbf{n} . ■

Auf die Konvention bzgl. der Richtung von \mathbf{n} werden wir noch eingehen. Unabhängig davon gilt aber:

$$\mathbf{n}\mathbf{n} = 1 \quad \implies \quad \mathbf{n}\partial_\kappa\mathbf{n} = 0, \tag{2.14}$$

d. h. die $\partial_\kappa\mathbf{n}(q^\lambda)$ liegen in der Tangentialebene des Punktes $\mathbf{x}(q^\lambda)$.

Beispiel: Wir betrachten den Fall der Hypersphäre im \mathbb{R}^{n+1} . Sie besteht aus den Punkten $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (\mathbf{x} - \mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a}) = \rho^2\}$ für $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1}$ und $\rho > 0$. Im folgenden sei o.B.d.A. $\mathbf{a} = 0$. An diesem Beispiel zeigt sich eine Eigenschaft vieler Flächen: Es ist nicht möglich, die *ganze* Hyperfläche durch *eine einzige* stetige Funktion $\mathbf{x}(q^\kappa)$ zu parametrisieren. Zum Beispiel ist die Parametrisierung (die Karte) mit Kugelkoordinaten $0 \leq \Theta \leq \pi$ und $0 \leq \Phi < 2\pi$ an den Stellen des Azimutalwinkels $\Phi = 0$ unstetig. Im allgemeinen ist eine stetige Parametrisierung also nur lokal und nicht global durchführbar⁵.

Eine solche Parametrisierung sei für unsere Hypersphäre hier angegeben: Man wähle einen Vektor $\mathbf{p} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\mathbf{p}\mathbf{p} = 1$. Dieser Vektor definiert als Normalenvektor eine Hyperebene,

⁵Man behilft sich dann durch das Benutzen verschiedener Parametrisierungen, die gemeinsam die gesamte Fläche abdecken. Diese Karten bilden einen *Atlas*.

die den \mathbb{R}^{n+1} in zwei Halbräume unterteilt, nämlich in Punkte $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n+1}$ mit $\mathbf{x}\mathbf{p} > 0$ und in die Punkte auf der Hyperebene mit $\mathbf{x}\mathbf{p} = 0$; siehe Abbildung 2.4 für den Fall $n = 2$. Sei P der orthogonale Projektor auf die durch \mathbf{p} definierte Hyperebene H . Wir betrachten die Punkte im Halbraum mit $\mathbf{x}\mathbf{p} > 0$. Diese Vektoren kann man schreiben als

$$\mathbf{x} = \mathbf{y} + z\mathbf{p}$$

mit $\mathbf{y} := P\mathbf{x}$ und $z > 0$. Die Punkte auf der Hypersphäre in diesem Halbraum sind nun charakterisiert durch

$$\mathbf{y}\mathbf{y} < \rho^2 \quad \text{und} \quad z = \sqrt{\rho^2 - \mathbf{y}\mathbf{y}} = z(\mathbf{y}) > 0.$$

Das heißt, wir können eine Parametrisierung mit kartesischen Koordinaten von $\mathbf{y} \in H$ und $\mathbf{y}\mathbf{y} < \rho^2$ vornehmen.

Die Tangentialebene in jedem Punkt der Hyperhemisphäre wird also von den n Vektoren

$$\partial_\kappa \mathbf{x} = \partial_\kappa \mathbf{y} + \mathbf{p} \partial_\kappa z$$

aufgespannt, soweit diese linear unabhängig sind; dies wird zuerst überprüft. Die Parameter (q^κ) sind nun die kartesischen Koordinaten (y^κ) auf der durch \mathbf{p} definierten Hyperebene H . Folglich sind

$$\partial_\kappa \mathbf{y} = (0, \dots, 0, \underbrace{1}_{\substack{\kappa\text{-te} \\ \text{Stelle}}}, 0, \dots, 0) \quad \kappa = 1, \dots, n, \quad (2.15)$$

womit die ersten n kanonischen Basisvektoren des \mathbb{R}^{n+1} gemeint sind. Es folgt:

$$\xi^\kappa \partial_\kappa \mathbf{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi^\kappa \partial_\kappa \mathbf{y} + \mathbf{p} \xi^\kappa \partial_\kappa z = 0. \quad (2.16)$$

Die Gleichung (2.16) multiplizieren wir mit \mathbf{p} und benutzen dabei, dass wegen $\mathbf{p}\mathbf{y} = 0$ auch $\mathbf{p} \partial_\kappa \mathbf{y} = 0$:

$$\xi^\kappa \partial_\kappa z = 0.$$

Das wiederum eingesetzt in (2.16) ergibt schließlich

$$\xi^\kappa \partial_\kappa \mathbf{y} = 0,$$

woraus wegen (2.15) $\xi^\kappa = 0$ für alle $\kappa = 1, \dots, n$ folgt. Also sind die $\partial_\kappa \mathbf{x}$ linear unabhängig, und die Tangentialebenen existieren in jedem Punkt der Hyperhemisphäre (aus Symmetriegründen natürlich dann auch in jedem Punkt der Hypersphäre).

Damit ist auch der Normalenvektor in jedem Punkt definiert. Wir erhalten aus der Bedingung $\mathbf{x}\mathbf{x} = \rho^2$ für die Hypersphärenpunkte \mathbf{x} durch Differenzieren die Gleichungen

$$\mathbf{x} \partial_\kappa \mathbf{x} = 0 \quad \kappa = 1, \dots, n.$$

Der Richtungsvektor \mathbf{x} auf jeden Punkt der Hypersphäre steht also, wie aus der Anschauung für $n = 2$ unmittelbar klar ist, senkrecht auf der Basis der Tangentialebene in diesem Punkt. Wir können deshalb schreiben:

$$\mathbf{n} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{x}. \quad (2.17)$$

Das Minuszeichen ist dabei Konvention und bedeutet, dass der Normalenvektor *nach innen* zeigt.

2.5 Parameter-Transformationen und Tensoren

Wechselt man die Parametrisierung der Hyperfläche, d. h. führt man neue Parameter

$$q'^{\kappa} := q'^{\kappa}(q^1, \dots, q^n) \quad \kappa = 1, \dots, n \quad (2.18)$$

mit

$$\det \left(\frac{\partial q'^{\kappa}}{\partial q^{\lambda}} \right) \neq 0$$

ein⁶ für die Punkte $\mathbf{x}'(q'^{\kappa}) = \mathbf{x}(q^{\lambda}(q'^{\mu}))$ derselben Hyperfläche, dann induziert dies eine Basistransformation in den Tangentialräumen nach der Kettenregel der Differentialrechnung:

$$\partial'_{\kappa} \mathbf{x}' \equiv \frac{\partial \mathbf{x}'}{\partial q'^{\kappa}} = \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial q'^{\kappa}} \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial q^{\lambda}} \equiv \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial q'^{\kappa}} \partial_{\lambda} \mathbf{x}. \quad (2.19)$$

Allgemein gilt für das Transformationverhalten des Tupels von Differentialoperatoren (∂_{κ}) unter Parametertransformation:

$$\partial'_{\kappa} = \frac{\partial q^{\lambda}}{\partial q'^{\kappa}} \partial_{\lambda}. \quad (2.20)$$

Betrachten wir nun das Tupel der Parameterdifferenziale (dq^{κ}) . Sein Verhalten unter Parametertransformation ist, wieder nach der Kettenregel:

$$dq'^{\kappa} = \frac{\partial q'^{\kappa}}{\partial q^{\lambda}} dq^{\lambda}. \quad (2.21)$$

Wir sehen, wenn wir (2.20) mit (2.21) vergleichen, dass sich (∂_{κ}) und (dq^{κ}) *invers zueinander* transformieren. Wir definieren nun allgemein:

Definition 2.3 Größen a^{κ} , die sich unter Parametertransformation nach

$$a'^{\kappa} = \frac{\partial q'^{\kappa}}{\partial q^{\lambda}} a^{\lambda}$$

transformieren, heißen *kontravariante Komponenten eines Tensors 1. Stufe, oder auch eines Vektors*. Nach Konvention werden sie mit oberen Indizes versehen.

⁶ $\left(\frac{\partial q'^{\kappa}}{\partial q^{\lambda}} \right)$ ist die Ableitung der Funktion in (2.18), eine $n \times n$ Matrix.

Größen a_κ , die sich unter Parametertransformation nach

$$a'_\kappa = \frac{\partial q^\lambda}{\partial q'^\kappa} a_\lambda$$

transformieren, heißen kovariante Komponenten eines Tensors 1. Stufe. Nach Konvention werden sie mit unteren Indizes versehen.

Die ∂_κ sind also kovariante Komponenten des Nablaoperators, die dq^κ kontravariante Komponenten des Vektors $d\mathbf{x} = \partial_\kappa \mathbf{x} dq^\kappa$.

Wir bestimmen nun das Transformationsverhalten des metrischen Tensors ($g_{\lambda\mu}$) zur Basis $\{\partial_\kappa \mathbf{x}\}$. Nach (2.3) und (2.19) gilt:

$$g'_{\lambda\mu} = \partial'_\lambda \mathbf{x}' \partial'_\mu \mathbf{x}' = \frac{\partial q^\alpha}{\partial q'^\lambda} \frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\mu} \partial_\alpha \mathbf{x} \partial_\beta \mathbf{x} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial q'^\lambda} \frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\mu} g_{\alpha\beta}. \quad (2.22)$$

Analog zu oben definieren wir

Definition 2.4 Größen $a^{\lambda\mu}$, die sich unter Parametertransformation nach

$$a'^{\lambda\mu} = \frac{\partial q'^\lambda}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q'^\mu}{\partial q^\beta} a^{\alpha\beta}$$

transformieren, heißen kontravariante Komponenten eines Tensors 2. Stufe. Nach Konvention werden sie mit oberen Indizes versehen.

Größen $a_{\lambda\mu}$, die sich unter Parametertransformation nach

$$a'_{\lambda\mu} = \frac{\partial q^\alpha}{\partial q'^\lambda} \frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\mu} a_{\alpha\beta}$$

transformieren, heißen kovariante Komponenten eines Tensors 2. Stufe. Nach Konvention werden sie mit unteren Indizes versehen.

Die $g_{\lambda\mu}$ sind also kovariante Komponenten eines Tensors 2. Stufe.

Ganz analog sind die kontravarianten und kovarianten Komponenten von Tensoren noch höherer Stufe definiert. Es gibt auch gemischte Komponenten, die sich bzgl. einiger Indizes wie kovariante, bzgl. der anderen Indizes wie kontravariante Komponenten transformieren, z. B.

$$T'^{\lambda}_{\mu} = \frac{\partial q'^\lambda}{\partial q^\alpha} \frac{\partial q^\beta}{\partial q'^\mu} T^{\alpha}_{\beta}. \quad (2.23)$$

Man beachte, dass i. a. $T^{\alpha}_{\beta} \neq T_{\beta}^{\alpha}$. Gleichheit gilt nur bei symmetrischen Tensorkomponenten (z. B. spielt die Reihenfolge der Indizes bei δ^{α}_{β} keine Rolle; man schreibt sie daher übereinander). Komponenten von Tensoren höherer Stufe ergeben sich nach Definition insbesondere durch einfache Produktbildung aus Komponenten von Tensoren niedrigerer Stufe. Zum Beispiel sind $a^{\lambda}b_{\mu}$ gemischte Komponenten eines Tensors 2. Stufe.

Man rechnet jetzt leicht nach, dass man mit Hilfe des metrischen Tensors bzw. seines Inversen aus kontravarianten Komponenten kovariante machen kann und umgekehrt, so dass jedem Satz kontravarianter Komponenten, etwa (a^κ) , auf natürliche Weise ein Satz kovarianter Komponenten (a_κ) zugeordnet ist und umgekehrt:

$$\begin{aligned} a_\lambda &= a^\mu g_{\mu\lambda}, \\ a^\mu &= a_\lambda g^{\lambda\mu}. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Dies ist aber gerade die Beziehung (2.9) zwischen den Komponenten eines Vektors bzgl. zueinander reziproker Basen. Man sagt: die Indizes werden „runter bzw. hoch gezogen“. Das Entsprechende gilt für Indizes an Komponenten von Tensoren beliebiger Stufe. Insbesondere sind dadurch die kontravarianten Differentialoperatorkomponenten (∂^κ) definiert. Die Vektoren $\{\partial^\kappa \mathbf{x}\}$ bilden wieder eine Basis des Tangentialraumes, und es gilt:

$$\partial_\kappa \mathbf{x} \partial^\lambda \mathbf{x} = g^{\lambda\mu} (\partial_\kappa \mathbf{x} \partial_\mu \mathbf{x}) = g^{\lambda\mu} g_{\kappa\mu} = \delta_\kappa^\lambda. \quad (2.25)$$

Die Basen $\{\partial_\kappa \mathbf{x}\}$ und $\{\partial^\kappa \mathbf{x}\}$ sind also reziprok zueinander. Das macht die hier über das Transformationsverhalten eingeführten Begriffe und die Schreibweise mit oberen und unteren Indizes konsistent mit dem in Abschnitt 2.3 gesagten.

Es liegt nahe zu vermuten, dass zu einer reziproken Basis $\{\partial^\kappa \mathbf{x}\}$ auch eine „reziproke“ Parametrisierung $\{q_\kappa\}$ gehören könnte. Die dazu gehörigen zweiten Ableitungen sollten dann symmetrisch sein. Man kann jedoch einsehen, dass die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial(g^{\mu\nu} \mathbf{x}_\mu)}{\partial q_\nu} = \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q_\mu \partial q_\nu} \stackrel{!}{=} \frac{\partial^2 \mathbf{x}}{\partial q_\nu \partial q_\mu} = \frac{\partial(g^{\mu\nu} \mathbf{x}_\nu)}{\partial q_\mu}$$

im Allgemeinen nicht erfüllt sind, so dass die obige Vermutung falsch ist und es i.A. *keine* zu $\{q^\kappa\}$ „reziproken“ Parameter gibt. Im Klartext, wir arbeiten immer mit einer vorgegebenen Parametrisierung $\{q^\kappa\}$ und verwenden $\{\partial^\lambda \mathbf{x}\}$ als suggestive und intern konsistente Notation, die nur die Tatsache ausnutzt, dass $g^{\mu\nu}$ die Inverse des metrischen Tensors $g_{\mu\nu}$ ist.

Ebenso prüft man leicht nach, dass sich die Stufe eines Tensors um 2 verringert, wenn über einen oberen und über einen unteren Index seiner Komponenten absummiert (*kontrahiert*) wird (\rightarrow Summenkonvention). Diesen Vorgang nennt man häufig *Verjüngung*. Zum Beispiel ist das Skalarprodukt der Vektoren $\mathbf{a} = a^\kappa \partial_\kappa \mathbf{x}$ und $\mathbf{b} = b^\lambda \partial_\lambda \mathbf{x}$ die Verjüngung der gemischten Komponenten $a^\lambda b_\mu$:

$$\mathbf{a}\mathbf{b} = (a^\kappa \partial_\kappa \mathbf{x})(b^\lambda \partial_\lambda \mathbf{x}) = a^\kappa b^\lambda (\partial_\kappa \mathbf{x} \partial_\lambda \mathbf{x}) = a^\kappa b^\lambda g_{\kappa\lambda} = a^\kappa b_\kappa = a_\lambda b^\lambda. \quad (2.26)$$

Diese Größe ist invariant unter Parametertransformationen, es handelt sich um einen *Tensor 0. Stufe* oder *Skalar*.

Der Vorteil, einen Ausdruck als Summe und Produkt von ko- und kontravarianten Komponenten von Tensoren, also von Objekten mit definiertem Transformationsverhalten, zu

schreiben, liegt darin, dass der ganze Ausdruck selber wieder ko- und/oder kontravariante Komponente eines Tensors ist, also ein leicht ablesbares Transformationsverhalten besitzt. Insbesondere ist eine Gleichung genau dann forminvariant unter Parametertransformation, wenn auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens gleichartige Tensorkomponenten stehen, also etwa:

$$T^{\kappa\lambda}_{\mu} = V^{\kappa} A^{\lambda}_{\mu} \xrightarrow{q^{\alpha} \mapsto q'^{\alpha}} T'^{\kappa\lambda}_{\mu} = V'^{\kappa} A'^{\lambda}_{\mu}.$$

Invariante Gesetzmäßigkeiten spielen aber in der Physik *die entscheidende* Rolle (Unabhängigkeit von der Wahl der Koordinaten, Rotationsinvarianz, Galilei-Invarianz, Lorentz-Invarianz, ...).

Warnung: Tensorkomponenten sind i. A. Funktionen des Ortes $\mathbf{x}(q^{\kappa}) \in \mathcal{M}$. Alle obigen Aussagen zum Transformationsverhalten gelten dann in *einem festen Punkt* auf der Hyperfläche. Ferner sind die Ableitungen $\partial_{\kappa} A^{\lambda}_{\mu \dots}$ i. A. *keine Tensorkomponenten* mehr im oben definierten Sinne. An dieser Stelle bedürfte es der Einführung einer verallgemeinerten Ableitung, der sogenannten *kovarianten Ableitung*⁷, auf die hier aber nicht eingegangen werden soll.

Im Weiteren wird häufig nicht zwischen den Komponenten eines Tensors und dem Tensor selber unterschieden. Deshalb wird etwa die Matrix $(g_{\lambda\mu})$ als *kovarianter Tensor 2. Stufe* bezeichnet, womit nun endlich ihre ursprüngliche Bezeichnung als metrischer *Tensor* gerechtfertigt ist.

2.6 Krümmung und Torsion

Wir betrachten eine Kurve auf einer n -dimensionalen Hyperfläche $\mathcal{M} \subset \mathcal{H} = \mathbb{R}^{n+1}$, d. h. eine Abbildung aus einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ und so beschaffen, dass

$$\mathbb{R} \supset I \ni t \mapsto \mathbf{x}(q^{\kappa}(t)) \in \mathcal{M} \subset \mathbb{R}^{n+1}.$$

Ein besonderer Parameter für die Kurve ist die Bogenlänge s des durchlaufenen Kurvenstücks, $t = s$. Wir schreiben für die Kurvenpunkte auch verkürzt

$$\mathbf{x}(q^{\kappa}(s)) \equiv \mathbf{x}(s).$$

Wir nennen den Tangentenvektor an diese Kurve, der nicht von der Parametrisierung abhängt,

$$\frac{\partial}{\partial s} \mathbf{x} \equiv d_s \mathbf{x} =: \mathbf{u}, \quad (2.27)$$

⁷„Kovariant“ heißt dann soviel wie „forminvariant unter Parametertransformation“ und hat damit auch eine andere Bedeutung als die oben eingeführte. Siehe etwa C.W. Misner, K.S. Thorne, J.A. Wheeler, *Gravitation*, W.H. Freeman, New York (1973). Für eine Einführung sei auf J.J. Callahan, *The Geometry of Spacetime: An Introduction to Special and General Relativity*, (Springer, New York, 2000) verwiesen.

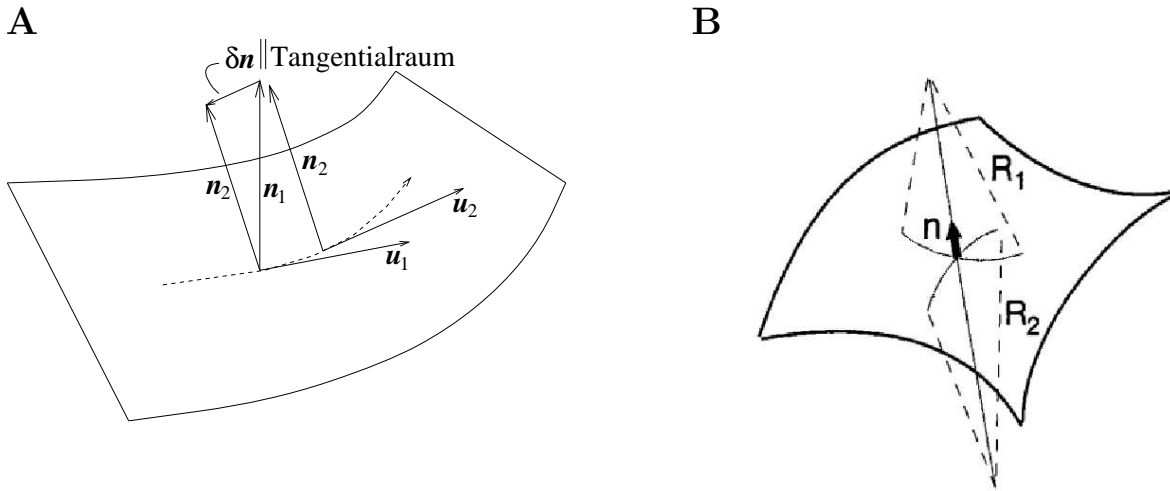


Abb.2.5: **A.** Änderung des Normalenvektors; siehe (2.29). **B.** Unterschiedliche Krümmungen auf einer Oberfläche. Die Beziehung zum Krümmungsradius R wird in §2.8.3 erklärt.

und es ist $\|\mathbf{u}\| = 1$, denn, mit etwas formaler Notation,

$$s = \int_{\mathbf{x}(0)}^{\mathbf{x}(s)} \|d\mathbf{x}\| = \int_0^s \left(\frac{d\mathbf{x}}{ds'} \frac{d\mathbf{x}}{ds'} \right)^{1/2} ds' \stackrel{!}{=} \int_0^s ds'.$$

In der geometrischen Anschauung ist dies ohnehin klar, da $\|\Delta\mathbf{x}/\Delta s\| = \|\Delta\mathbf{x}\|/\Delta s = \Delta s/\Delta s = 1$. Ferner gilt in jedem Punkt von \mathcal{M} , $\mathbf{n}\mathbf{n} = \|\mathbf{n}\|^2 = 1$, so dass sich entlang der Kurve

$$\mathbf{n} = \mathbf{n}(s) \implies \mathbf{n}d_s\mathbf{n} = 0, \tag{2.28}$$

ergibt, d. h. $d_s\mathbf{n}$ ist Tangentialvektor von \mathcal{M} ; siehe Abbildung 2.5 für $n = 2$. Wir können also ganz allgemein schreiben

$$d_s\mathbf{n} = -\kappa\mathbf{u} + \tau\mathbf{v}, \tag{2.29}$$

mit Koeffizienten κ und τ , sowie einem weiteren Vektor \mathbf{v} aus dem Tangentialraum, der so gewählt sein soll, dass $\|\mathbf{v}\| = 1$, $\mathbf{u}\mathbf{v} = 0$ und $\tau \geq 0$. Laut §2.2 ist dieser Vektor \mathbf{v} eindeutig bestimmt, sobald $\|\mathbf{v}\| = 1$ und $\tau \geq 0$. κ heißt die *Krümmung* von \mathcal{M} in Richtung \mathbf{u} , τ heißt die *Torsion* von \mathcal{M} entlang \mathbf{u} . Beide Größen sind zur Änderung des Normalenvektors der Hyperfläche entlang der gewählten Kurve proportional, wobei diese Änderung einmal in Richtung der Kurve, das andere mal im Tangentialraum orthogonal zu dieser Richtung gemessen wird:

$$\kappa = -\mathbf{u}d_s\mathbf{n} = -d_s\mathbf{x}d_s\mathbf{n}, \quad \tau = \mathbf{v}d_s\mathbf{n}. \tag{2.30}$$

Die Krümmung gibt somit an, wie schnell sich die Tangentialebene (die ja durch \mathbf{n} eindeutig definiert ist) beim Fortschreiten entlang der Kurve $\mathbf{x}(s)$, d. h. in Richtung \mathbf{u} , in dieser Richtung dreht. Die Torsion gibt die Größe der Drehung der Tangentialebene in der Richtung senkrecht zur Bewegungsrichtung an. Insbesondere macht die Krümmung der *Kurve* $\|d_s^2\mathbf{x}\|$ i. A. keine Aussage über Flächeneigenschaften, wie das Beispiel in Abbildung 2.6 verdeutlicht.

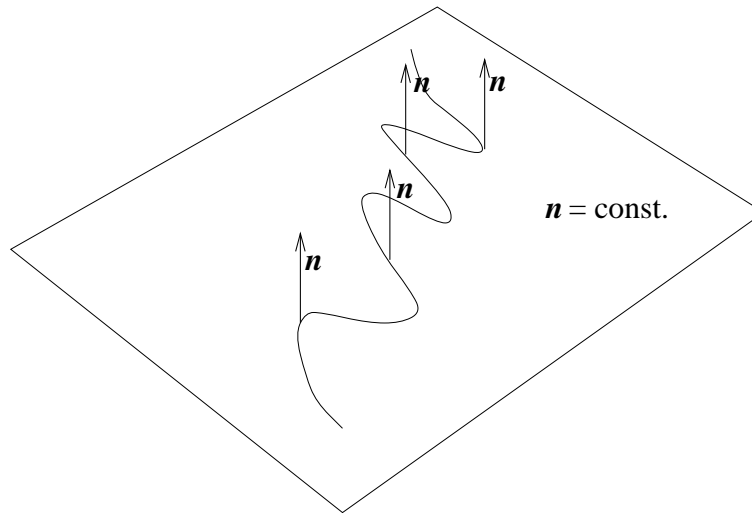


Abb. 2.6: Zum Unterschied zwischen Kurven- und Flächenkrümmung

Unsere Beispielfläche aus Abschnitt 2.4, die Hypersphäre, hat keine Torsion, aber ist gekrümmt. Aus (2.17) folgt nämlich:

$$d_s \mathbf{n} = -\frac{1}{\rho} d_s \mathbf{x} = -\frac{1}{\rho} \mathbf{u} \quad \Rightarrow \quad \kappa = \frac{1}{\rho}. \quad (2.31)$$

Es entspricht also den Begriffen der Umgangssprache, dass bei wachsendem Radius der Hypersphäre ihre Krümmung abnimmt.

Wir definieren:

Definition 2.5 *Eine Richtung heißt*

- *asymptotisch, falls $\kappa = 0$.*
- *Hauptrichtung, falls $\tau = 0$. Die Krümmung in so einer Richtung nennt sich Hauptkrümmung.*

Eine Kurve, die in jedem Punkt einer Hauptrichtung folgt, nennt sich Krümmungslinie.

Offenbar ist eine Krümmungslinie durch die Gleichung von **Rodrigues** (1815)

$$d_s \mathbf{n} + \kappa d_s \mathbf{x} = 0 \quad (2.32)$$

charakterisiert, wobei κ die Hauptkrümmung in der entsprechenden (lokalen) Richtung ist. Als Anwendung davon beweisen wir das

Theorem 2.1 (F. Joachimsthal, 1846) *Falls zwei Hyperflächen sich in einer gemeinsamen Krümmungslinie K schneiden, so ist entlang K der Winkel zwischen beiden Flächen konstant.*

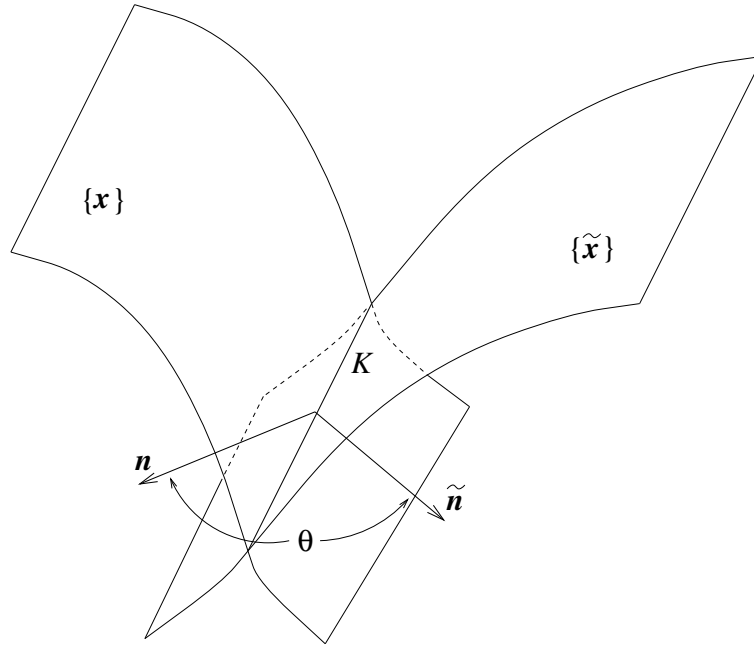


Abb. 2.7: Schnitt zweier Hyperflächen

Beweis: Seien $\mathbf{x}(q^\kappa)$ und $\tilde{\mathbf{x}}(\tilde{q}^\kappa)$ die beiden Hyperflächen. Entlang K gilt $\mathbf{x}(q^\kappa) = \tilde{\mathbf{x}}(\tilde{q}^\kappa)$ mit den Hauptkrümmungen κ bzw. $\tilde{\kappa}$. Seien weiter \mathbf{n} und $\tilde{\mathbf{n}}$ die Normalenvektoren an irgendeiner Stelle auf K (siehe Abbildung 2.7), so ist der Winkel θ zwischen den beiden Hyperflächen

$$\cos \theta = \mathbf{n} \tilde{\mathbf{n}} .$$

Es ergibt sich

$$d_s \cos \theta = \mathbf{n} d_s \tilde{\mathbf{n}} + \tilde{\mathbf{n}} d_s \mathbf{n} \stackrel{(2.32)}{=} -\tilde{\kappa} \mathbf{n} d_s \tilde{\mathbf{x}} - \kappa \tilde{\mathbf{n}} d_s \mathbf{x} \stackrel{\text{auf } K}{=} -\underbrace{\tilde{\kappa} \mathbf{n} d_s \tilde{\mathbf{x}}}_{=0} - \underbrace{\kappa \tilde{\mathbf{n}} d_s \mathbf{x}}_{=0} = 0 . \blacksquare$$

2.7 Parallelfächen

Wir wollen später Membranen als zwei äquidistante Hyperflächen, kurz Parallelfächen, beschreiben. Deshalb werden hierzu ein paar Worte verloren.

Sei \mathcal{M} wieder unsere Hyperfläche, die aus regulären Punkten $\{\mathbf{x}(q^\kappa)\}$ besteht, d. h. die $\{\partial_\kappa \mathbf{x} \mid \kappa = 1, \dots, n\}$ sind linear unabhängig. Wir definieren eine zweite Hyperfläche $\hat{\mathcal{M}}$ durch (siehe Abbildung 2.8)

$$\mathcal{M} \ni \mathbf{x} \longrightarrow \hat{\mathbf{x}} := \mathbf{x} + \beta \mathbf{n}, \quad \beta = \text{konstant} \neq 0 . \tag{2.33}$$

Wir untersuchen die Bedingung an β dafür, dass $\{\hat{\mathbf{x}}(q^\kappa)\} = \hat{\mathcal{M}}$ wieder reguläre Punkte sind. Nehmen wir an, die $\{\partial_\kappa \hat{\mathbf{x}} \mid \kappa = 1, \dots, n\}$ seien linear abhängig, es gäbe also (u^κ) mit

$$u^\kappa \partial_\kappa \hat{\mathbf{x}} = u^\kappa (\partial_\kappa \mathbf{x} + \beta \partial_\kappa \mathbf{n}) = 0 . \tag{2.34}$$

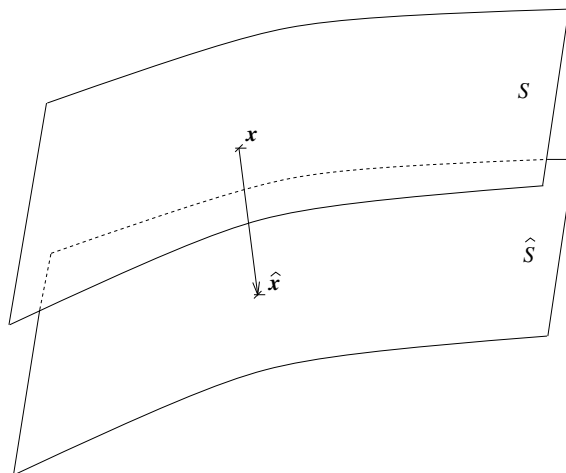


Abb. 2.8: Parallelflächen

Wir finden sicherlich eine Kurve $q^\kappa(s)$ im (n -dimensionalen) Parameterraum mit

$$u^\kappa = d_s q^\kappa \quad (\text{z. B. } q^\kappa(s) = \int_0^s u^\kappa(s') ds'),$$

die natürlich einer Kurve $\mathbf{x}(q^\kappa(s))$ auf \mathcal{M} entspricht. Aus (2.34) wird damit

$$d_s \mathbf{x} + \beta d_s \mathbf{n} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad d_s \mathbf{n} + \beta^{-1} d_s \mathbf{x} = 0. \quad (2.35)$$

Aus der Aussage von Rodrigues, Gleichung (2.32), liest man nun ab, dass β^{-1} eine Hauptkrümmung sein muß, um (2.35) zu erfüllen. Umgekehrt besteht $\hat{\mathcal{M}}$ genau dann aus regulären Punkten, wenn β^{-1} keine Hauptkrümmung ist. Die Punkte \mathbf{x} und $\hat{\mathbf{x}}$, die nach (2.33) zusammenhängen, heißen dann *korrespondierende Punkte*.

Wir berechnen nun die Beziehung zwischen einer Hauptkrümmung κ von \mathcal{M} und der *korrespondierenden Hauptkrümmung* $\hat{\kappa}$ von $\hat{\mathcal{M}}$. Es zeige $d_s \mathbf{x}$ in eine Hauptrichtung von \mathcal{M} mit Krümmung κ . Nach (2.33) und (2.32) ist

$$d_s \hat{\mathbf{x}} = d_s \mathbf{x} + \beta d_s \mathbf{n} = (-\kappa^{-1} + \beta) d_s \mathbf{n}. \quad (2.36)$$

Falls $\beta^{-1} \neq \kappa$, wie gefordert für reguläres $\hat{\mathcal{M}}$, liest man daraus ab, wieder nach (2.32), dass $\hat{\mathbf{x}}(s) = \mathbf{x}(s) + \beta \mathbf{n}(s)$ einer Hauptrichtung von $\hat{\mathcal{M}}$ folgt mit der Hauptkrümmung

$$\hat{\kappa} = \frac{\kappa}{1 - \beta\kappa}. \quad (2.37)$$

2.8 Die Grundformen

Im folgenden wird gezeigt, wie Länge, Krümmung und Torsion von den sogenannten *Grundformen* abhängen und aus diesen berechnet werden können.

2.8.1 Die 1. Grundform: Metrik

Wir betrachten eine Kurve $\mathbf{x}(q^\kappa(s)) \equiv \mathbf{x}(s)$ auf einer Hyperfläche \mathcal{M} . Das vektorielle Kurvenelement ist

$$d\mathbf{x}(s) = d_s \mathbf{x} ds = \partial_\kappa \mathbf{x} \partial_s q^\kappa ds = \partial_\kappa \mathbf{x} dq^\kappa. \quad (2.38)$$

Das quadrierte Längenelement ist somit

$$ds^2 = d\mathbf{x} d\mathbf{x} = \partial_\kappa \mathbf{x} \partial_\lambda \mathbf{x} dq^\kappa dq^\lambda \equiv g_{\kappa\lambda} dq^\kappa dq^\lambda. \quad (2.39)$$

Den Metriktenor ($g_{\kappa\lambda}$), der demnach die Distanzen zwischen Punkten auf der Hyperfläche „mißt“ (was ja gerade der Name andeutet), bezeichnet man auch als *1. Grundform*. Dabei bedeutet Distanz die vom \mathbb{R}^n induzierte *euklidische* Länge einer Kurve auf der Hyperfläche \mathcal{M} . Aus Gleichung (2.39) geht explizit hervor (vgl. Abschnitt 2.5), dass die Distanzen selbst Invarianten (unter Parametertransformationen) sind, also intrinsische Eigenschaften der Fläche — was ja auch geometrisch sofort einleuchtet.

Ein einfaches Beispiel ist die Berechnung der Bogenlänge einer Kurve $\mathbf{x}(q^\kappa(t))$, die mittels $t \in [a, b]$ parametrisiert wird. Aus (2.39) folgt

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = g_{\lambda\mu} \dot{q}^\lambda \dot{q}^\mu,$$

und damit für die Bogenlänge

$$s = \int_{\mathbf{x}(a)}^{\mathbf{x}(b)} ds = \int_a^b \frac{ds}{dt} dt = \int_a^b \left(g_{\lambda\mu} \dot{q}^\lambda \dot{q}^\mu\right)^{1/2} dt. \quad (2.40)$$

Da $s = s(b)$ i. A. eine monoton wachsende Funktion von b ist, kann man b nach s auflösen und eine regulären Kurve immer nach der Bogenlänge parametrisieren; vgl. Jost, S. 3.

2.8.2 Die 2. Grundform: Krümmung

Wir schreiben jetzt die Krümmung nach (2.30) ein wenig um auf

$$\kappa = -d_s \mathbf{x} d_s \mathbf{n} = -\partial_\lambda \mathbf{x} \partial_\mu \mathbf{n} \underbrace{\partial_s q^\lambda}_{u^\lambda} \underbrace{\partial_s q^\mu}_{u^\mu} = h_{\lambda\mu} u^\lambda u^\mu \quad (2.41)$$

mit

$$h_{\lambda\mu} := -\partial_\lambda \mathbf{x} \partial_\mu \mathbf{n}. \quad (2.42)$$

Den Tensor 2. Stufe ($h_{\lambda\mu}$) bezeichnet man als *2. Grundform*. Er mißt die Krümmung der Hyperfläche in einer beliebigen Richtung \mathbf{u} des lokalen Tangentialraums. Man sieht an (2.41) wieder explizit, dass auch die Krümmungen intrinsische Flächeneigenschaften sind. Man kann die 2. Grundform wegen

$$\mathbf{n} \partial_\mu \mathbf{x} = 0 \quad \Rightarrow \quad \partial_\lambda (\mathbf{n} \partial_\mu \mathbf{x}) = \partial_\lambda \mathbf{n} \partial_\mu \mathbf{x} + \mathbf{n} \partial_{\lambda\mu}^2 \mathbf{x} = 0$$

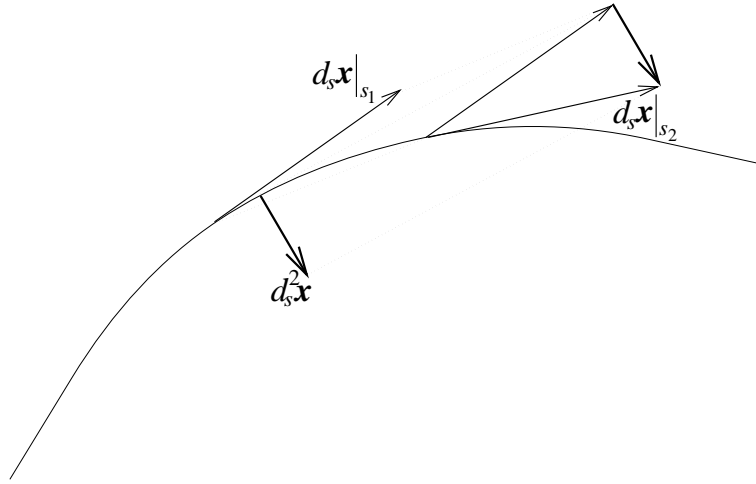


Abb. 2.9: Krümmungsvektor einer Kurve

auch noch schreiben als

$$h_{\lambda\mu} = \mathbf{n} \partial_{\lambda\mu}^2 \mathbf{x} = h_{\mu\lambda}, \quad (2.43)$$

was ihre Symmetrie offensichtlich macht. Außerdem führt es zu einer geometrischen Interpretation.

Betrachten wir einen Punkt $\mathbf{x}(q) \in \mathcal{M}$ sowie eine Umgebung, die wir mit Δq im n -dimensionalen Parameter-Raum angeben. Wir führen nun eine Taylor-Entwicklung bis zur 2. Ordnung durch:

$$\mathbf{x}(q + \Delta q) - [\mathbf{x}(q) + \Delta q^\lambda \partial_\lambda \mathbf{x}] = \frac{1}{2} \Delta q (\partial_{\lambda\mu}^2 \mathbf{x}) \Delta q. \quad (2.44)$$

Die Ableitungen werden alle an der Stelle $q \in \mathbb{R}^n$ ausgewertet. Wenn man (2.44) komponentenweise liest, hat man die altbekannte Taylor-Entwicklung einer reellen Funktion auf \mathbb{R}^n . Der Term links zwischen den eckigen Klammern ist, was die lineare Approximation im Tangentialraum liefert. Wenn sich etwas “krümmt”, dann weg vom Tangentialraum. Dies mißt man entlang dem Normalenvektor:

$$\mathbf{n}[\mathbf{x}(q + \Delta q) - \mathbf{x}(q)] = \frac{1}{2} \Delta q (\mathbf{n} \partial_{\lambda\mu}^2 \mathbf{x}) \Delta q \stackrel{(2.43)}{=} \frac{1}{2} \Delta q (h_{\lambda\mu}) \Delta q, \quad (2.45)$$

da $\mathbf{n}[\mathbf{x}(q + \Delta q) - \mathbf{x}(q)]$ der Abstand (mit Vorzeichen) von $\mathbf{x}(q + \Delta q)$ zum Tangentialraum an der Stelle $\mathbf{x}(q)$ ist. Mit anderen Worten, $(h_{\lambda\mu})$ liefert ein direktes Maß für die Krümmung.

2.8.3 Das Theorem von Meusnier

Wir wollen nun mit Hilfe der 2. Grundform den Zusammenhang zwischen der Krümmung κ der Hyperfläche in Richtung $\mathbf{u} = d_s \mathbf{x}$ und der Krümmung $\tilde{\kappa} := \|d_s^2 \mathbf{x}\|$ der Kurve explizit machen. Zunächst ein paar Worte zu Letzterer: Wegen

$$(d_s \mathbf{x})(d_s \mathbf{x}) = 1 \quad \Rightarrow \quad (d_s \mathbf{x})(d_s^2 \mathbf{x}) = 0$$

gibt es einen eindeutig bestimmten Einheitsvektor $\tilde{\mathbf{n}} \perp d_s \mathbf{x}$, so dass

$$d_s^2 \mathbf{x} = \tilde{\kappa} \tilde{\mathbf{n}} \quad (\tilde{\kappa} \stackrel{!}{\geq} 0).$$

$\tilde{\mathbf{n}}$ heißt *Normalenvektor der Kurve* (vgl. Abbildung 2.9), $d_s^2 \mathbf{x}$ ist der *Krümmungsvektor der Kurve*. Es gilt nun:

$$d_s^2 \mathbf{x} = d_s \left(\partial_\lambda \mathbf{x} d_s q^\lambda \right) = \partial_{\lambda\mu}^2 \mathbf{x} \underbrace{d_s q^\lambda}_{u^\lambda} \underbrace{d_s q^\mu}_{u^\mu} + \partial_\lambda \mathbf{x} d_s^2 q^\lambda.$$

Multiplikation mit dem Normalenvektor der Hyperfläche \mathbf{n} ergibt

$$\mathbf{n} d_s^2 \mathbf{x} = \mathbf{n} \partial_{\lambda\mu}^2 \mathbf{x} u^\lambda u^\mu \stackrel{(2.43)}{=} h_{\lambda\mu} u^\lambda u^\mu \stackrel{(2.41)}{=} \kappa,$$

oder anders ausgedrückt:

Theorem 2.2 (J.B. Meusnier, 1776) *Die Relation*

$$\kappa = \tilde{\kappa} \cos \theta,$$

mit $\theta := \angle(\mathbf{n}, d_s^2 \mathbf{x})$ als Winkel zwischen \mathbf{n} und $d_s^2 \mathbf{x}$, ergibt eine direkte Beziehung zwischen der Krümmung κ entlang einer Kurve im Punkte \mathbf{x} auf einer Hyperfläche und der intrinsischen Krümmung $\tilde{\kappa}$ dieser Kurve in \mathbf{x} .

Mit dem Meusnier'schen Theorem wird eine Beziehung zwischen der Krümmung einer Kurve in einer Ebene und der Krümmung der gleichen Kurve als Teil eines Flächenstücks hergestellt. Es lohnt sich, ersteres noch ein wenig genauer zu betrachten. Zu diesem Zwecke rufen wir den Begriff Krümmungsradius ϱ in Erinnerung. Sei unsere Kurve in \mathbb{R}^2 mittels ihrer Kurvenlänge s parametrisiert und sei φ der Winkel zwischen Tangente und x -Achse; in Monge-Darstellung wäre $\mathbf{x} = (x, y(x))$ und $\tan \varphi = dy/dx =: y'$. Der Krümmungsradius ist nun definiert durch

$$\varrho := \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \left| \frac{\Delta s}{\Delta \varphi} \right| = \left| \frac{ds}{d\varphi} \right|. \quad (2.46)$$

Für einen Kreis mit Radius R , zum Beispiel, sieht man sofort $\varrho = R$. Wir behaupten

$$\tilde{\kappa} := \|d_s^2 \mathbf{x}\| = 1/\varrho. \quad (2.47)$$

Geometrisch ist dies sofort klar (warum?). Außerdem zeigt die Konstruktion von ϱ , dass ein Kreis mit Radius ϱ und Mittelpunkt in Richtung von $\tilde{\mathbf{n}}$ sich von allen Kreisen am Besten der Kurve "anschmiegt"; siehe auch Fig. 2.13. Die Approximationsgenauigkeit ist zumindest 2. Ordnung; vgl. Willmore §I.6.

Dank Meusnier, der nur ein einziges – sein berühmtes – Paper geschrieben hat und dabei von Euler (1760) motiviert wurde, erhalten wir auch eine direkte, geometrische Deutung der Krümmung κ , wie sie in (2.29) definiert wurde. Wir betrachten dazu die Schnittkurve ζ eines

Flächenstücks an der Stelle $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ mit einer Ebene \mathcal{E} durch den Normalenvektor \mathbf{n} und eine vorgegebene Richtung im Tangentialraum, die nun dem Tangentialvektor $d_s \mathbf{x}$ entlang ς entspricht. Sei $\tilde{\kappa} = \rho^{-1}$ die Krümmung von \mathcal{M} an der Stelle \mathbf{x} in der Ebene \mathcal{E} nach (2.47) und sei κ die Krümmung der Fläche nach (2.29). Es gilt dank Meusnier: $\kappa = \pm \tilde{\kappa}$, wo \pm in $\mathbf{n} = \pm \tilde{\mathbf{n}}$ der ursprünglichen Krümmungsdefinition (2.29) Rechnung trägt.

Bemerkung: In der Monge-Darstellung $\mathbf{x} = (x, y(x))$ des \mathbb{R}^2 ist der Ausdruck für ϱ ein wenig umständlicher als (2.47). Wir haben

$$ds = [(dx)^2 + (dy)^2]^{1/2} = [1 + (y')^2]^{1/2} dx .$$

Wenn wir Differentiale von $y' = \tan \varphi$ nehmen, erhalten wir $y'' dx = (1 + \tan^2 \varphi) d\varphi = [1 + (y')^2] d\varphi$ und damit

$$\kappa = \varrho^{-1} = \frac{d\varphi}{ds} = \frac{y''}{[1 + (y')^2]^{3/2}} . \quad (2.48)$$

Der Krümmungsradius *mit Vorzeichen* zeigt, ob die Kurve an der Stelle \mathbf{x} oberhalb (> 0) oder unterhalb (< 0) der Tangente liegt. Die geometrisch näherliegende Parametrisierung führt sowohl oben in (2.46) wie hier zu einfacheren bzw. einsichtigeren Formeln.

2.8.4 Die Ableitungsformeln von Weingarten

Mit $(h_{\lambda\mu})$ kann man auch die Ableitungen $\partial_\lambda \mathbf{n}$ des Normalenvektors der Hyperfläche durch die Tangentialvektoren ausdrücken. Die $\partial_\lambda \mathbf{n}$ liegen nämlich wegen $\mathbf{n}\mathbf{n} = 1$ im Tangentialraum, der das kanonische reziproke Basenpaar $\{\partial_\kappa \mathbf{x}, \partial^\kappa \mathbf{x}\}$ besitzt (vgl. Abschnitt 2.5). Wir können also schreiben:

$$\partial_\mu \mathbf{n} = \partial^\kappa \mathbf{x} \eta_{\kappa\mu} ,$$

mit passenden Koeffizienten $\eta_{\kappa\mu}$. Aus der Definition (2.42) von $(h_{\lambda\mu})$ ergibt sich damit:

$$-h_{\lambda\mu} = \partial_\lambda \mathbf{x} \partial_\mu \mathbf{n} = \underbrace{\partial_\lambda \mathbf{x} \partial^\kappa \mathbf{x}}_{\delta_\lambda^\kappa} \eta_{\kappa\mu} = \eta_{\lambda\mu} ,$$

also

$$\partial_\mu \mathbf{n} = -h_{\kappa\mu} \partial^\kappa \mathbf{x} . \quad (2.49)$$

Dies sind die *Ableitungsformeln von Weingarten* (1861). Sie werden oft auch in der Form

$$\partial_\mu \mathbf{n} = -h^\lambda{}_\mu \mathbf{x}_\lambda \quad (2.50)$$

geschrieben, wo

$$h^\lambda{}_\mu := g^{\lambda\nu} h_{\nu\mu} = h_\mu^\lambda \quad (2.51)$$

ist.

2.8.5 Hauptkrümmungen als Lösung eines verallgemeinerten Eigenwertproblems

Nehmen wir an, κ sei eine Hauptkrümmung. Dann gilt die Gleichung (2.32) nach Rodrigues für eine adäquat gewählte Kurve $\mathbf{x}(s) \subset \mathcal{M}$. Wir können schreiben:

$$d_s \mathbf{n} = \partial_\lambda \mathbf{n} \underbrace{d_s q^\lambda}_{u^\lambda} \stackrel{(2.49)}{=} -\partial^\kappa \mathbf{x} h_{\kappa\lambda} u^\lambda \stackrel{(2.32)}{=} -\kappa d_s \mathbf{x},$$

also

$$\kappa d_s \mathbf{x} = \kappa u^\lambda \partial_\lambda \mathbf{x} = \partial^\kappa \mathbf{x} h_{\kappa\lambda} u^\lambda.$$

Durch Multiplikation dieser Gleichung mit $\partial_\mu \mathbf{x}$ erhält man:

$$\kappa \underbrace{(\partial_\mu \mathbf{x} \partial_\lambda \mathbf{x})}_{g_{\mu\lambda}} u^\lambda = \underbrace{(\partial_\mu \mathbf{x} \partial^\kappa \mathbf{x})}_{\delta_\mu^\kappa} h_{\kappa\lambda} u^\lambda = h_{\mu\lambda} u^\lambda,$$

oder

$$(h_{\mu\lambda} - \kappa g_{\mu\lambda}) u^\lambda = 0 \iff (H - \kappa G) \vec{u} = 0, \quad (2.52)$$

wobei $G := (g_{\mu\lambda})$, $H := (h_{\mu\lambda})$ und $\vec{u} = (u^\mu) \in \mathbb{R}^n$ nichts Anderes als ein n -Tupel reeller Zahlen ist. Gleichung (2.52) ist das *verallgemeinerte* Eigenwertproblem für die n Hauptkrümmungen $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ als verallgemeinerte Eigenwerte und die n Koordinatenvektoren $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ der Hauptrichtungen als verallgemeinerte Eigenvektoren.

Man kann dieses Problem auf zumindest zwei, äquivalente, gewöhnliche Eigenwertprobleme zurückführen. Erstens, weil der metrische Tensor G invertierbar ist, multiplizieren wir $(H - \kappa G) \vec{u} = 0$ von links mit G^{-1} und erhalten sofort

$$G^{-1} H \vec{u} = \kappa \vec{u}. \quad (2.53)$$

Wir werden diese Form später oft verwenden; siehe z.B. (2.93).

Zweitens ist die Matrix $G = (g_{\mu\lambda})$ bekanntlich reell-symmetrisch und echt positiv-definit ($G > 0$). Daher existieren $G^{1/2}$ und $G^{-1/2}$. Wir nehmen eine Transformation $\vec{v} := G^{1/2} \vec{u}$ vor und erhalten aus (2.52)

$$H G^{-1/2} \vec{v} = \kappa G^{1/2} \vec{v}.$$

Nach Multiplikation mit $G^{-1/2}$ von links wird daraus das gewöhnliche Eigenwertproblem

$$G^{-1/2} H G^{-1/2} \vec{v} = \kappa \vec{v}. \quad (2.54)$$

Da die Matrix $G^{-1/2} H G^{-1/2}$ reell-symmetrisch ist, gibt es tatsächlich n reelle Eigenwerte $\kappa_1, \dots, \kappa_n$ und orthogonale Eigenvektoren $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n$ bzgl. des kanonischen Skalarproduktes des \mathbb{R}^{n+1} , d. h. für $1 \leq h, h' \leq n$ ist

$$\delta_{hh'} = (G^{1/2} \vec{u}_h)(G^{1/2} \vec{u}_{h'}) \stackrel{G^{1/2} \text{ sym.}}{=} \vec{u}_h(G \vec{u}_{h'}). \quad (2.55)$$

Für $h = h'$ beinhaltet dies eine (Gratis-)Normierung, so dass die Eigenvektoren orthonormal sind. In den üblichen Komponenten heißt das aber

$$u_h^\mu g_{\mu\lambda} u_{h'}^\lambda = \delta_{hh'} \iff (u_h^\mu \partial_\mu \mathbf{x})(u_{h'}^\lambda \partial_\lambda \mathbf{x}) = \delta_{hh'} . \quad (2.56)$$

Die verallgemeinerten Eigenvektoren $\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_n$ sind also bzgl. der Metrik G orthogonal, und die Hauptrichtungen $\mathbf{u}_1 = u_1^\lambda \partial_\lambda \mathbf{x}, \dots, \mathbf{u}_n = u_n^\lambda \partial_\lambda \mathbf{x}$ sind orthogonal (im Tangentialraum) bzgl. des kanonischen Skalarproduktes des \mathbb{R}^{n+1} . Als Tangenten natürlich parametrisierter Kurven sind sie dann sogar *orthonormal*, weil $d_s \mathbf{x} d_s \mathbf{x} = 1$; im Folgenden werden wir (2.56) des öfteren ausnützen.

Eigentlich ist es im Nachhinein mehr als überraschend, dass die schlichte Bedingung, eine Richtung sei Hauptrichtung, falls die Torsion τ in (2.29) verschwinde, in einem n -dimensionalen Tangentialraum zu n *orthogonalen* Hauptrichtungen führt.

Hauptkrümmungen als Eigenwerte der Weingarten-Abbildung

Wie in der mathematischen Literatur gebräuchlich, kann man die Hauptkrümmungen zwar nicht so direkt wie oben aber dafür ein wenig eleganter als Eigenwerte einer linearen Abbildung W vom Tangentialraum in sich erhalten. Sei $\mathbf{t} = t^\mu \partial_\mu \mathbf{x}$ ein Vektor im Tangentialraum $\mathcal{T}_x(\mathcal{M})$ von $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$, in den wir nun die lineare *Weingarten-Abbildung* W definieren:

$$W(\mathbf{x})(t^\mu \partial_\mu \mathbf{x}) := -t^\mu \partial_\mu \mathbf{n} . \quad (2.57)$$

W 's Abhängigkeit von \mathbf{x} wird im Folgenden meistens unterdrückt. Da als Konsequenz von $\mathbf{n} \partial_\mu \mathbf{n} = 0$ die Vektoren $\mathbf{n}_\mu := \partial_\mu \mathbf{n}$ alle im Tangentialraum sind, ist W eine wohldefinierte Abbildung von $\mathcal{T}_x(\mathcal{M})$ in sich. Der n -dimensionale Raum $\mathcal{T}_x(\mathcal{M}) \subset \mathbb{R}^{n+1}$ hat, wie oben, von \mathbb{R}^{n+1} die Euklidische Distanz und damit ein Skalarprodukt geerbt. Wir zeigen, dass W bzgl. dieses Skalarproduktes ein selbstadjungierter Operator ist:

$$(a^\mu \mathbf{x}_\mu)[W(b^\nu \mathbf{x}_\nu)] = -a^\mu b^\nu (\mathbf{x}_\mu \mathbf{n}_\nu) = a^\mu b^\nu h_{\mu\nu} = a^\mu b^\nu h_{\nu\mu} = [W(a^\mu \mathbf{x}_\mu)](b^\nu \mathbf{x}_\nu) , \quad (2.58)$$

wo wir natürlich $\mathbf{x}_\nu := \partial_\nu \mathbf{x}$ sowie die Definition (2.42) und die zugehörige Symmetrie (2.43) verwendet haben.

Behauptung: Die Eigenwerte der Weingarten-Abbildung $W(\mathbf{x})$ sind die Hauptkrümmungen der Fläche an der Stelle $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$.

Um dies einzusehen, schreiben wir das in $\mathcal{T}_x(\mathcal{M})$ ansässige Eigenwertproblem $W\mathbf{t} = \kappa\mathbf{t}$ aus,

$$W(t^\nu \mathbf{x}_\nu) = \kappa (t^\nu \mathbf{x}_\nu) \Rightarrow -t^\nu \mathbf{n}_\nu = \kappa t^\nu \mathbf{x}_\nu , \quad (2.59)$$

bilden das Skalarprodukt mit \mathbf{x}_μ ,

$$-t^\nu \mathbf{x}_\mu \mathbf{n}_\nu = \kappa \mathbf{x}_\mu \mathbf{x}_\nu t^\nu \Rightarrow (h_{\mu\nu} - \kappa g_{\mu\nu}) t^\nu = 0 \quad (2.60)$$

und stellen fest, dass wir in der Tat beim verallgemeinerten Eigenwertproblem (2.52) gelandet sind. Dank der Selbstadjungiertheit des Operators W ist außerdem sofort klar, dass die so definierten Hauptkrümmungen κ reell und die zugehörigen Hauptkrümmungsrichtungen \mathbf{t} als Eigenvektoren von W orthogonal sind.

Zum Schluss kann man mittels der Weingarten-Abbildung die drei Grundformen, deren ersten zwei wir schon begegnet sind und deren dritte $K = (k_{\mu\nu})$ bald (§2.8.7) eingeführt wird, elegant als auf $\mathcal{T}_x(\mathcal{M})$ definierte quadratische Formen schreiben. Römisch durchnummeriert ergeben sie sich mit $\mathbf{t} = t^\mu \mathbf{x}_\mu \in \mathcal{T}_x(\mathcal{M})$ sowie $\vec{t} = (t^\mu) \in \mathbb{R}^n$:

$$\text{I}(\mathbf{t}) = \mathbf{t} \mathbf{t} = \vec{t} G \vec{t}, \quad \text{II}(\mathbf{t}) = \mathbf{t} W \mathbf{t} = \vec{t} H \vec{t}, \quad \text{III}(\mathbf{t}) = (W \mathbf{t}) (W \mathbf{t}) = \vec{t} K \vec{t}. \quad (2.61)$$

Dies läßt sich einfach anhand (2.75) in Kombination mit (2.57) verifizieren.

2.8.6 Das Theorem von Euler

Nach (2.41) ist die Krümmung κ in eine beliebige Richtung $\mathbf{u} = u^\mu \partial_\mu \mathbf{x}$ gegeben durch

$$\kappa = u^\mu h_{\mu\lambda} u^\lambda.$$

Die Hauptrichtungen bilden das Orthonormalsystem $\{\mathbf{u}_h := u_h^\mu \partial_\mu \mathbf{x} \mid 1 \leq h \leq n\}$, wie oben gefunden, und die zugehörigen Hauptkrümmungen seien κ_h . Sei ferner θ_h der Winkel zwischen der vorgegebenen Richtung \mathbf{u} und der Hauptrichtung \mathbf{u}_h . Dann gilt:

Theorem 2.3 (L. Euler, 1760)

$$\kappa = \sum_{h=1}^n \kappa_h \cos^2 \theta_h$$

Beweis: Nach dem letzten Abschnitt gilt für die Basis⁸ $\{\vec{u}_h = (u^\mu)_h \mid 1 \leq h \leq n\}$ des \mathbb{R}^n :

$$H \vec{u}_h = \kappa_h G \vec{u}_h \quad (1 \leq h \leq n).$$

Mit (2.56) ergibt sich daraus, dass sich H schreiben läßt als (warum?)

$$H = \sum_{h=1}^n \kappa_h G | \vec{u}_h \rangle \langle \vec{u}_h | G. \quad (2.62)$$

Das bedeutet aber

$$\begin{aligned} \kappa &= u^\lambda h_{\lambda\mu} u^\mu \equiv \langle \vec{u} | H | \vec{u} \rangle = \sum_h \kappa_h \langle \vec{u} | G | \vec{u}_h \rangle \langle \vec{u}_h | G | \vec{u} \rangle = \\ &= \sum_h \kappa_h \left[(u^\lambda \partial_\lambda \mathbf{x}) (u_h^\mu \partial_\mu \mathbf{x}) \right]^2 = \sum_h \kappa_h [\mathbf{u} \mathbf{u}_h]^2 = \sum_h \kappa_h \cos^2 \theta_h. \end{aligned} \quad (2.63)$$

⁸Es handelt sich um eine Basis, da die $\{G^{1/2} \vec{u}_h \mid 1 \leq h \leq n\}$ nach (2.54) eine Orthonormalbasis bilden.

Da $\sum_h \cos^2 \theta_h = 1$, ist κ eine *konvexe* Kombination der κ_h . ■

Korollar 1: Für eine 2-dim. Mannigfaltigkeit kann man die beiden Hauptkrümmungen κ'_1 und κ'_2 auch direkt als Maximum und Minimum des Ausdrucks $\kappa = \sum_{h=1}^n \kappa_h \cos^2 \theta_h$ charakterisieren, wenn man den Vektor \mathbf{u} einfach im Tangentialraum, einer 2-dim. Ebene, dreht.

Korollar 2 (Sophie Germain, 1821): Seien κ_1 und κ_2 die Hauptkrümmungen am Punkte $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ auf einer 2-dim. Oberfläche und seien κ'_1 und κ'_2 die Krümmungen in zwei *beliebige jedoch orthogonale* Richtungen. So gilt

$$\kappa'_1 + \kappa'_2 = \kappa_1 + \kappa_2 . \quad (2.64)$$

Beweis: Sei θ der Winkel zwischen der Hauptrichtung \mathbf{e}_1 und dem Tangentialvektor in Richtung 1. Nach Euler gilt

$$\kappa'_1 = \kappa_1 \cos^2 \theta + \kappa_2 \sin^2 \theta$$

sowie

$$\kappa'_2 = \kappa_1 \cos^2(\theta + \pi/2) + \kappa_2 \sin^2(\theta + \pi/2) = \kappa_1 \sin^2 \theta + \kappa_2 \cos^2 \theta .$$

Addition beider Gleichungen liefert (2.64). ■

Wir werden später noch sehen, dass die Summe $\kappa_1 + \kappa_2$ in der Membranphysik eine besondere Rolle spielt. Sophie Germain (Paris 1811–15; 1821 & 1831) war die erste, die dies explizit erkannt und formalisiert hat; der obige Beweis ist faktisch der ihre. Auch der Name “mittlere Krümmung” für $\kappa_1 + \kappa_2$ geht auf sie zurück; oft wird die mittlere Krümmung auch als die Hälfte dieses Ausdrucks definiert⁹.

Korollar 3 (Gesetz der kollektiven Krümmungsinvarianz): Seien κ_i , $1 \leq i \leq n$, die n Hauptkrümmungen am Punkte \mathbf{x} einer n -dim. Oberfläche \mathcal{M} und seien κ'_α die Krümmungen in n *beliebige jedoch orthogonale* Richtungen im Tangentialraum $\mathcal{T}_\mathbf{x}(\mathcal{M})$. So gilt

$$\sum_{\alpha=1}^n \kappa'_\alpha = \sum_{j=1}^n \kappa_j = \text{tr } G^{-1}H . \quad (2.65)$$

Beweis: (à la Germain): Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, dass die n vorgegebenen Richtungen $\{\mathbf{t}_\alpha; 1 \leq \alpha \leq n\}$ eine Orthonormalbasis mit $\mathbf{t}_\alpha \mathbf{t}_\beta = \delta_{\alpha\beta}$ bilden, so dass (in Diracscher Notation)

$$\mathbf{1} = \sum_{\alpha} |\mathbf{t}_\alpha\rangle \langle \mathbf{t}_\alpha| \quad (2.66)$$

⁹Meusnier hat schon schon 1776 gesehen, dass die Summe $H := \kappa_1 + \kappa_2 \equiv 0$ eine 2-dim. Minimalfläche charakterisiert, d.h. eine Mannigfaltigkeit, deren Oberfläche bei Variation unter allen “ähnlichen” Mannigfaltigkeiten stationär ist. Wenn das Volumen erhalten bleibt, ändert sich die Bedingung zur mittleren Krümmung in $\kappa_1 + \kappa_2 \equiv c$, wo $c \neq 0$ eine Konstante ist. Es gibt eine enge Beziehung zum Problem der mathematischen Beschreibung von Seifenblasen, insbesondere der Charakterisierung ihrer Oberflächenformen. Siehe J. Oprea, *The Mathematics of Soap Films: Explorations with Maple*, American Mathematical Society, Providence, RI (2000). Dort findet man auch eine einfache Herleitung der Laplace-Young (1805) Gleichung $p = \sigma H$, wo p der Druckunterschied zwischen beiden Seiten einer Seifenblase ist.

eine Zerlegung der Einheit im Tangentialraum ist. Da die $\mathbf{t}_\alpha = t_\alpha^\mu \partial_\mu \mathbf{x} = t_\alpha^\mu \mathbf{x}_\mu$ eine Orthonormalbasis bilden, können wir $\vec{u} := \vec{t}_\alpha$ in (2.63) substituieren und erhalten (α fest)

$$\kappa'_\alpha = \sum_h \kappa_h \langle \mathbf{u}_h | \mathbf{t}_\alpha \rangle \langle \mathbf{t}_\alpha | \mathbf{u}_h \rangle . \quad (2.67)$$

Summieren wir (2.67) über alle α , so ergibt sich dank (2.66) und (2.56) sofort das erste Gleichheitszeichen in (2.65). Das zweite ist eine Konsequenz von (2.53). ■

2.8.7 Die 3. Grundform

Die Norm des Vektors $d_s \mathbf{n}$ ergibt sich aus

$$d_s \mathbf{n} d_s \mathbf{n} = \partial_\lambda \mathbf{n} \partial_\mu \mathbf{n} \underbrace{d_s q^\lambda}_{u^\lambda} \underbrace{d_s q^\mu}_{u^\mu} = k_{\lambda\mu} u^\lambda u^\mu ,$$

mit

$$k_{\lambda\mu} := \partial_\lambda \mathbf{n} \partial_\mu \mathbf{n} . \quad (2.68)$$

$K := (k_{\lambda\mu})$ wird als 3. Grundform bezeichnet. Sie ist ein reell-symmetrischer Tensor und gibt Information über die Torsion τ , denn wegen

$$d_s \mathbf{n} \stackrel{(2.29)}{=} -\kappa \mathbf{u} + \tau \mathbf{v} \quad \xrightarrow{\mathbf{u} \perp \mathbf{v}} \quad d_s \mathbf{n} d_s \mathbf{n} = \kappa^2 + \tau^2$$

gilt für die Krümmung in und die Torsion entlang der Richtung \mathbf{u} :

$$\kappa^2 + \tau^2 = u^\lambda k_{\lambda\mu} u^\mu . \quad (2.69)$$

Auch die Torsion ist natürlich somit eine intrinsische Flächeneigenschaft.

Es gibt einen Zusammenhang zwischen den drei Grundformen:

$$k_{\lambda\mu} = \partial_\lambda \mathbf{n} \partial_\mu \mathbf{n} \stackrel{(2.49)}{=} (h_{\alpha\lambda} \partial^\alpha \mathbf{x})(h_{\beta\mu} \partial^\beta \mathbf{x}) = h_{\lambda\alpha} g^{\alpha\beta} h_{\beta\mu} , \quad (2.70)$$

oder

$$K = H G^{-1} H . \quad (2.71)$$

Insbesondere ist K also positiv-definit¹⁰, was schon aus (2.68) ersichtlich ist. Mit der Darstellung (2.62) von H ergibt sich aus (2.71) weiter:

$$K = \sum_{h=1}^n \kappa_h^2 G | \mathbf{u}_h \rangle \langle \mathbf{u}_h | G . \quad (2.72)$$

Das verallgemeinerte Eigenwertproblem für K lautet somit

$$K \mathbf{u}_h = \kappa_h^2 G \mathbf{u}_h . \quad (2.73)$$

¹⁰ G und damit G^{-1} sind strikt positiv.

K hat danach die verallgemeinerten Eigenwerte κ_h^2 .

Aus (2.69) erhalten wir ganz nach der Art des Eulerschen Theorems in (2.63)

$$\kappa^2 + \tau^2 = u^\lambda k_{\lambda\mu} u^\mu = \langle \mathbf{u} | K | \mathbf{u} \rangle \stackrel{(2.72)}{=} \sum_h \kappa_h^2 \langle \mathbf{u} | G | \mathbf{u}_h \rangle \langle \mathbf{u}_h | G | \mathbf{u} \rangle,$$

und schließlich

$$\kappa^2 + \tau^2 = \sum_h \kappa_h^2 \cos^2 \theta_h. \quad (2.74)$$

Abschließend seien die drei Grundformen noch einmal zusammengestellt:

$\begin{aligned} g_{\lambda\mu} &= \partial_\lambda \mathbf{x} \partial_\mu \mathbf{x} \\ h_{\lambda\mu} &= -\partial_\lambda \mathbf{x} \partial_\mu \mathbf{n} = \mathbf{n} \partial_\lambda \partial_\mu \mathbf{x} \\ k_{\lambda\mu} &= \partial_\lambda \mathbf{n} \partial_\mu \mathbf{n} \end{aligned}$	(2.75)
--	--------

2.8.8 Die Grundformen bei Parallelfächen

Gegeben seien zwei Hyperflächen \mathcal{M} und $\hat{\mathcal{M}}$ mit den regulären Punkten $\mathbf{x}(q^\kappa)$ bzw. $\hat{\mathbf{x}}(q^\kappa) = \mathbf{x}(q^\kappa) + \beta \mathbf{n}(q^\kappa)$, wobei $\mathbf{n}(q^\kappa)$ der Normalenvektor von \mathcal{M} (und $\hat{\mathcal{M}}$) ist; vgl. Abschnitt 2.7. Wir berechnen den Zusammenhang zwischen den Grundformen dieser Parallelfächen. Die 1. Grundform von $\hat{\mathcal{M}}$ ist

$$\hat{g}_{\lambda\mu} = \partial_\lambda \hat{\mathbf{x}} \partial_\mu \hat{\mathbf{x}} = \partial_\lambda \mathbf{x} \partial_\mu \mathbf{x} + \beta (\partial_\lambda \mathbf{x} \partial_\mu \mathbf{n} + \partial_\lambda \mathbf{n} \partial_\mu \mathbf{x}) + \beta^2 \partial_\lambda \mathbf{n} \partial_\mu \mathbf{n}.$$

Es gilt also:

$$\hat{g}_{\lambda\mu} = g_{\lambda\mu} - 2\beta h_{\lambda\mu} + \beta^2 k_{\lambda\mu}. \quad (2.76)$$

Mit $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{n}$ erhalten wir für die 2. Grundform

$$\hat{h}_{\lambda\mu} = -\partial_\lambda \hat{\mathbf{x}} \partial_\mu \mathbf{n} = -(\partial_\lambda \mathbf{x} \partial_\mu \mathbf{n} + \beta \partial_\lambda \mathbf{n} \partial_\mu \mathbf{n}),$$

und somit

$$\hat{h}_{\lambda\mu} = h_{\lambda\mu} - \beta k_{\lambda\mu}. \quad (2.77)$$

Ferner gilt natürlich:

$$\hat{k}_{\lambda\mu} = k_{\lambda\mu}. \quad (2.78)$$

Als Anwendung dieser Beziehungen verifizieren wir die Relation $\hat{\kappa} = \kappa / (1 - \beta\kappa)$ zwischen korrespondierenden Hauptkrümmungen κ und $\hat{\kappa}$. Sei $\mathbf{a} = u^\kappa \partial_\kappa \mathbf{x}$ eine Hauptrichtung von \mathcal{M} . Die korrespondierende Hauptrichtung von $\hat{\mathcal{M}}$ ist dann $\hat{\mathbf{a}} = u^\kappa \partial_\kappa \hat{\mathbf{x}}$; siehe Abschnitt 2.7. Wenn wir $\|\mathbf{a}\| = 1$ wählen, dann ist

$$\hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{a}} = \hat{g}_{\lambda\mu} u^\lambda u^\mu \stackrel{(2.76)}{=} 1 - 2\beta\kappa + \beta^2 \kappa^2 = (1 - \beta\kappa)^2.$$

Die zu κ korrespondierende Hauptkrümmung ergibt sich folglich zu

$$\hat{\kappa} = \frac{u^\lambda \hat{h}_{\lambda\mu} u^\mu}{\hat{\mathbf{a}} \hat{\mathbf{a}}} \stackrel{(2.77)}{=} \frac{\kappa - \beta\kappa^2}{(1 - \beta\kappa)^2} = \frac{\kappa}{1 - \beta\kappa}, \quad (2.79)$$

wie bereits auf anderem Wege in Abschnitt 2.7 berechnet.

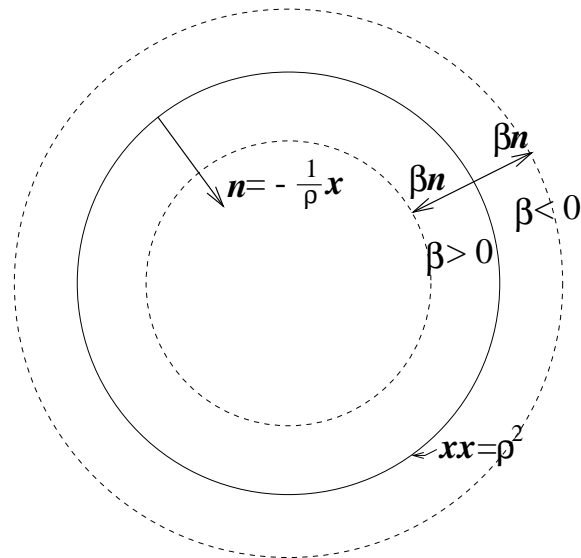


Abb.2.10: Äquidistante Hyperflächen einer Sphäre \mathcal{M} . Solange $\beta \neq \rho$, schrumpft die ‘innere’ äquidistante Hyperfläche nicht auf einen Punkt zusammen.

2.8.9 Ein einfaches Beispiel

Wir betrachten die durch die Punkte \mathbf{x} mit $\mathbf{x}^2 \equiv \mathbf{x}\mathbf{x} = \rho^2$ definierte Hypersphäre. Die dazu äquidistante Fläche mit $\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \beta\mathbf{n}$ ist die zu ihr konzentrisch gelegene Hypersphäre mit Radius $\rho - \beta$; siehe Abbildung 2.10. Nach (2.31) gilt für die Hauptkrümmungen:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{1}{\rho}, \\ \hat{\kappa} &= \frac{1}{\rho - \beta}. \end{aligned}$$

Andererseits erhalten wir aus der Formel $\hat{\kappa} = \kappa/(1 - \beta\kappa)$ in (2.79)

$$\hat{\kappa} = \frac{1/\rho}{1 - \beta/\rho} = \frac{1}{\rho - \beta},$$

also tatsächlich dasselbe Ergebnis. Die Bedingung $\beta\kappa \neq 1$ dafür, dass die $\hat{\mathbf{x}}$ wieder regulär sind, bedeutet hier $\beta \neq \rho$ und verhindert, dass die Sphäre auf einen Punkt zusammenschrumpft.

2.9 Zwei-dimensionale Flächen in drei Dimensionen

In diesem Abschnitt werden wir unsere Betrachtungen auf Hyperflächen mit $n = 2$ spezialisieren. Dazu benutzen wir eine Notation, die auf Gauß (1827) zurück geht. Mit ihr schreibt

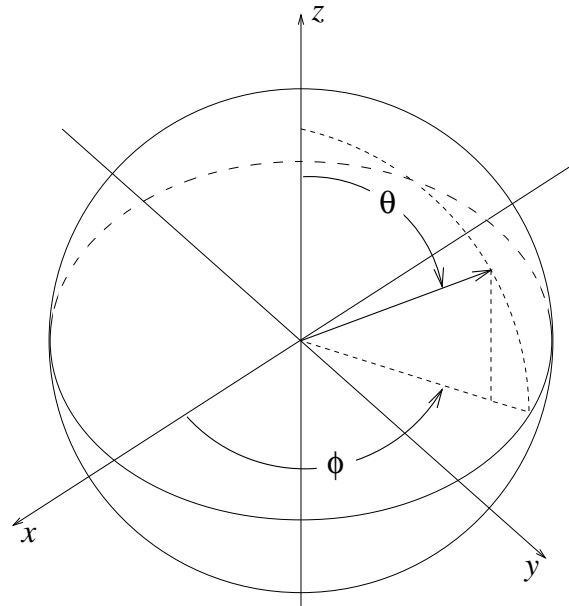


Abb. 2.11: Kugelkoordinaten

sich die 1. Grundform als

$$g = (\partial_\lambda \mathbf{x} \partial_\mu \mathbf{x}) =: \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}. \quad (2.80)$$

Die Darstellungsmatrix des Metriktensors $g_{\lambda\mu}$ heißt jetzt wohlgemerkt g , um sie vom Matrixelement G zu unterscheiden.

Als Beispiel betrachten wir die Einheitssphäre in \mathbb{R}^3 , also die Punkte mit $\mathbf{x}^2 = 1$. Die Parametrisierung der $\mathbf{x} = (x, y, z)$ in Kugelkoordinaten lautet (vgl. Abbildung 2.11):

$$\begin{aligned} x &= \sin \theta \cos \phi \\ y &= \sin \theta \sin \phi \\ z &= \cos \theta \end{aligned} \quad (2.81)$$

In der Notation der letzten Abschnitte wäre also etwa $q^1 = \theta$ und $q^2 = \phi$. Eine kleine Rechnung ergibt

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2, \quad (2.82)$$

oder, mit Hilfe von (2.39),

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \sin^2 \theta \end{pmatrix}. \quad (2.83)$$

Da $F = \partial_1 \mathbf{x} \partial_2 \mathbf{x} = 0$, sind die Kugelkoordinaten orthogonal.

Für den Flächen-Normalenvektor in \mathbb{R}^3 gilt allgemein:

$$\mathbf{n} = \pm \frac{\partial_1 \mathbf{x} \times \partial_2 \mathbf{x}}{\|\partial_1 \mathbf{x} \times \partial_2 \mathbf{x}\|} = \pm \frac{\partial_1 \mathbf{x} \times \partial_2 \mathbf{x}}{W} \quad (2.84)$$

(Vorzeichen je nach Konvention), mit

$$W = \|\partial_1 \mathbf{x} \times \partial_2 \mathbf{x}\| = \sqrt{EG - F^2} = \sqrt{\det g}. \quad (2.85)$$

Merke: $\det g > 0$, da g strikt positiv ist. Die Form (2.85) von W ergibt sich direkt aus der *Identität von Lagrange* und (2.80):

$$(\mathbf{a} \times \mathbf{b})(\mathbf{a}' \times \mathbf{b}') = (\mathbf{a}\mathbf{a}')(\mathbf{b}\mathbf{b}') - (\mathbf{a}\mathbf{b}')(\mathbf{a}'\mathbf{b}) = \det \begin{pmatrix} (\mathbf{a}\mathbf{a}') & (\mathbf{a}\mathbf{b}') \\ (\mathbf{a}'\mathbf{b}) & (\mathbf{b}\mathbf{b}') \end{pmatrix} \quad (2.86)$$

mit $\mathbf{a} = \mathbf{a}' = \partial_1 \mathbf{x}$ sowie $\mathbf{b} = \mathbf{b}' = \partial_2 \mathbf{x}$. Alternativ, $(\partial_1 \mathbf{x} \times \partial_2 \mathbf{x})^2 + (\partial_1 \mathbf{x} \partial_2 \mathbf{x})^2 = (\partial_1 \mathbf{x})^2 (\partial_2 \mathbf{x})^2$. In unserem Beispiel der Einheitskugel ist offenbar $\mathbf{n} = \pm \mathbf{x}$.

Für die zweite Grundform benutzen wir ebenfalls die Gauß-Notation

$$H = (\mathbf{n} \partial_\lambda \partial_\mu \mathbf{x}) =: \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}. \quad (2.87)$$

Für $n = 2$ lauten die Komponenten mit (2.84) explizit:

$$h_{\lambda\mu} = \mathbf{n} \partial_\lambda \partial_\mu \mathbf{x} = \pm \frac{\partial_1 \mathbf{x} \times \partial_2 \mathbf{x}}{\sqrt{EG - F^2}} \partial_\lambda \partial_\mu \mathbf{x} = \pm \frac{\det(\partial_1 \mathbf{x}, \partial_2 \mathbf{x}, \partial_\lambda \partial_\mu \mathbf{x})}{\sqrt{EG - F^2}}. \quad (2.88)$$

Wir berechnen daraus nun die beiden Hauptkrümmungen als verallgemeinerte Eigenwerte (siehe Unterabschnitt 2.8.5). Mit

$$X = \begin{pmatrix} X_{11} & X_{12} \\ X_{12} & X_{22} \end{pmatrix} := g^{-1/2} H g^{-1/2}$$

sind die beiden Hauptkrümmungen die Lösungen der Gleichung

$$\det(X - \kappa \mathbb{1}) = 0. \quad (2.89)$$

Speziell für 2×2 Matrizen wird daraus

$$\kappa^2 - \underbrace{\kappa(X_{11} + X_{22})}_{\text{tr } X} + \underbrace{(X_{11}X_{22} - X_{12}^2)}_{\text{det } X} = 0, \quad (2.90)$$

oder

$$(\kappa - \kappa_1)(\kappa - \kappa_2) = \kappa^2 - \kappa(\kappa_1 + \kappa_2) + \kappa_1 \kappa_2 = 0. \quad (2.91)$$

Die beiden Hauptkrümmungen ergeben sich folglich aus

$$\begin{aligned} \text{der mittleren Krümmung } \mathbb{H} &:= \kappa_1 + \kappa_2 \\ \text{und dem Gaußschen Krümmungsmaß } \mathbb{K} &:= \kappa_1 \kappa_2, \end{aligned} \quad (2.92)$$

die sich noch auf vielfältige andere Weisen schreiben lassen:

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &= \text{tr}(g^{-1/2} H g^{-1/2}) = \text{tr}(g^{-1} H) = g^{\lambda\mu} h_{\mu\lambda} = h^\lambda_\lambda = \text{tr}(h^\lambda_\mu), \\ \mathbb{K} &= \det(g^{-1/2} H g^{-1/2}) = \det(g^{-1} H) = \frac{\det H}{\det g} = \det(h^\lambda_\mu). \end{aligned} \quad (2.93)$$

In den Gauß-Matrixelementen lautet das Gaußsche Krümmungsmaß ferner

$$\mathbb{K} = \frac{LN - M^2}{EG - F^2}, \quad (2.94)$$

sowie, wegen

$$g^{-1} = \frac{1}{\det g} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix}, \quad (2.95)$$

die mittlere Krümmung

$$\mathbb{H} = \operatorname{tr}(g^{-1}H) = \frac{1}{\det g} \operatorname{tr} \begin{pmatrix} GL - FM & GM - FN \\ EM - FL & EN - FM \end{pmatrix} = \frac{EN - 2FM + GL}{EG - F^2}. \quad (2.96)$$

\mathbb{H} und \mathbb{K} sind in den Hauptkrümmungen symmetrisch. Sie haben gegenüber diesen den Vorteil, dass sie — etwa nach (2.96) bzw. (2.94) — direkt aus den Grundformen berechenbar sind.

Die 3. Grundform hängt nach (2.71) mit den anderen beiden zusammen. Analog der Berechnung von \mathbb{H} nach (2.93) gilt ferner:

$$\operatorname{tr}(g^{-1}K) = \operatorname{tr}(g^{-1/2}Kg^{-1/2}) \stackrel{(2.71)}{=} \sum_h \kappa_h^2. \quad (2.97)$$

In 3 Dimensionen heißt das:

$$\operatorname{tr}(g^{-1}K) = \kappa_1^2 + \kappa_2^2 = (\kappa_1 + \kappa_2)^2 - 2\kappa_1\kappa_2 = \mathbb{H}^2 - 2\mathbb{K}. \quad (2.98)$$

Die Ableitungsformeln von Weingarten lassen sich schreiben als

$$\partial_\mu \mathbf{n} = -\partial^\kappa \mathbf{x} h_{\kappa\mu} = -\partial_\lambda \mathbf{x} \underbrace{g^{\lambda\kappa} h_{\kappa\mu}}_{g^{-1}H}. \quad (2.99)$$

Mit (2.95) ergibt sich daraus für ein 2-dimensionales Flächenstück in 3 Dimensionen:

$$\begin{aligned} \partial_1 \mathbf{n} &= -\frac{1}{EG - F^2} [(GL - FM)\partial_1 \mathbf{x} + (EM - FL)\partial_2 \mathbf{x}], \\ \partial_2 \mathbf{n} &= -\frac{1}{EG - F^2} [(GM - FN)\partial_1 \mathbf{x} + (EN - FM)\partial_2 \mathbf{x}]. \end{aligned} \quad (2.100)$$

2.10 Geometrische Betrachtungen zur Krümmung

Eine Hyperfläche in 3 Dimensionen sei definiert durch die Punkte (x, y, z) mit $F(x, y, z) = 0$ für eine glatte Funktion F . Lokal — wohlgermerkt — läßt sich dann $z = f(x, y)$ schreiben mit einer entsprechenden Funktion f . Die erste Näherung an diese Fläche in einem Punkt

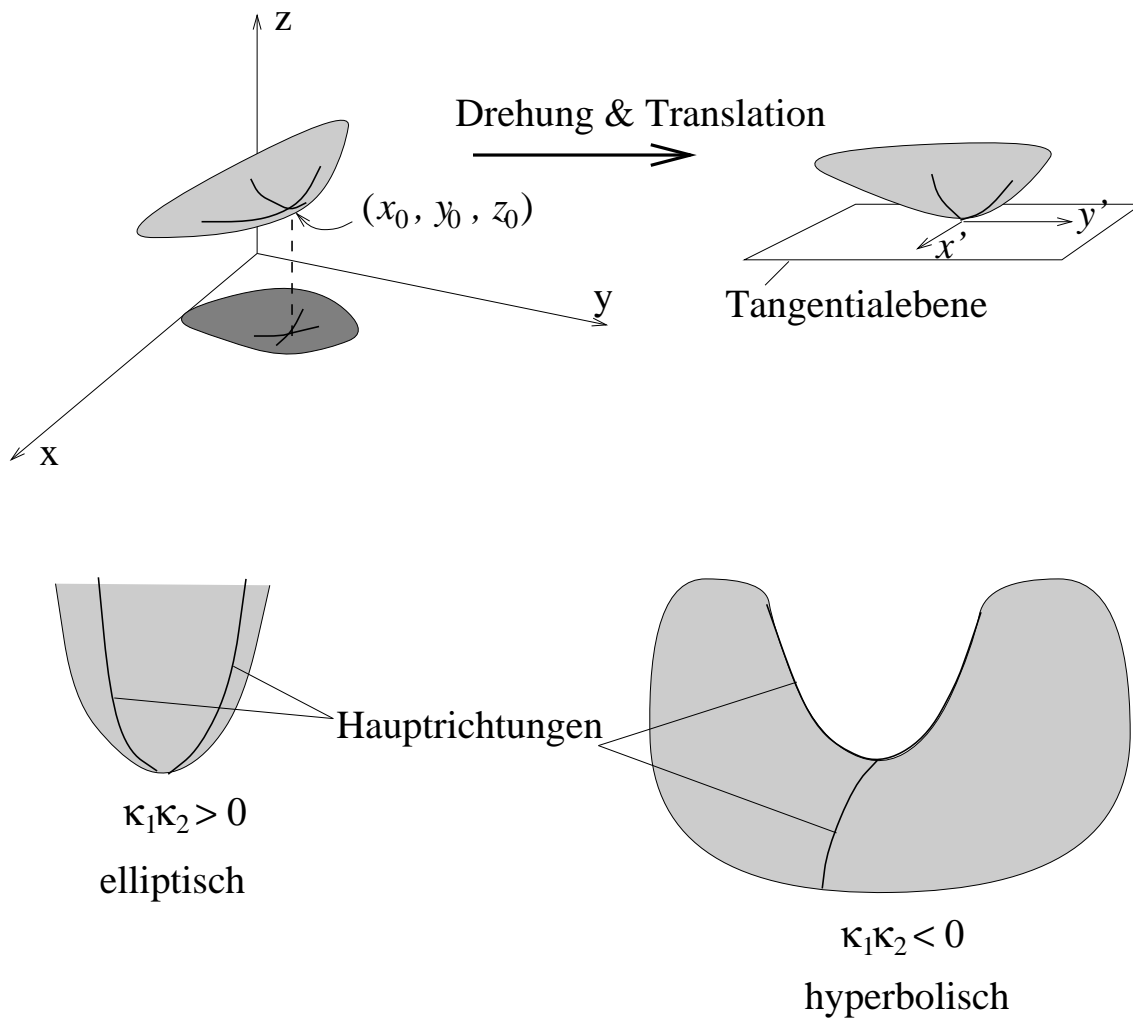


Abb. 2.12: Zusammenhang zwischen Hauptkrümmungen und lokaler Gestalt von Hyperflächen.

$(x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0))$ ist die Tangentialebene in diesem Punkt, die zweite Näherung eine quadratische Fläche, entsprechend der Taylor-Entwicklung

$$z = f(x_0, y_0) + (x - x_0)\partial_x f(x_0, y_0) + (y - y_0)\partial_y f(x_0, y_0) + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\partial_x^2 f(x_0, y_0) + (x - x_0)(y - y_0)\partial_{xy} f(x_0, y_0) + \dots \quad (2.101)$$

Wir führen nun eine Drehung und eine Translation des Koordinatensystems durch, bei der

$$\begin{aligned} (x, y, z) &\mapsto (x', y', z') \\ (x_0, y_0, z_0) &\mapsto (x'_0, y'_0, z'_0) \end{aligned} \quad (2.102)$$

und

$$f'(x', y') := z' \quad (2.103)$$

in einer Umgebung von (x'_0, y'_0) . Wir können die neuen Koordinaten (x', y', z') immer so wählen, dass $x'_0 = y'_0 = z'_0 = f'(x'_0, y'_0) = 0$, sowie dass die Tangentialebene parallel zur x - y -Ebene liegt, d. h. $\partial_{x'} f'(x'_0, y'_0) = \partial_{y'} f'(x'_0, y'_0) = 0$; siehe Abbildung 2.12. Die Fläche ist dann in führender Ordnung um $(x'_0, y'_0, z'_0) = (0, 0, 0)$ gegeben durch die quadratische Form

$$z' = (x', y') \left[\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_x^2 f' & \partial_{x'y'} f' \\ \partial_{y'x'} f' & \partial_y^2 f' \end{pmatrix} \Big|_{(0,0)} \right] \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}. \quad (2.104)$$

Die Matrix in eckigen Klammern ist symmetrisch und man verifiziert leicht (warum?), dass ihre Eigenvektoren gerade die Hauptrichtungen und ihre Eigenwerte die Hauptkrümmungen im Punkt (x_0, y_0, z_0) sind. Die Hauptkrümmungen bestimmen deshalb die Gestalt der Fläche in einer Umgebung dieses Punktes in der Weise, wie in Abbildung 2.12 dargestellt.

Man könnte sich also wundern, warum wir die Hauptkrümmungen nicht gleich so wie oben eingeführt haben. Es gibt jedoch zwei gute Gründe, dies nicht zu tun. Erstens, *wie* erhält man die hübsche Darstellung (2.104)? Es ist zwar klar, dass es eine solche gibt, aber es ist weniger klar — understatement —, wie man sie explizit erhält. Zweitens, die Krümmung wird von einer Hyperfläche als *geometrisches Objekt* bestimmt. Die Definition (2.29) mittels des Normalenvektors bringt dies auf Anhieb explizit zum Ausdruck. Damit wird auch sofort klar, dass Krümmung eine intrinsische Eigenschaft der Hyperfläche ist.

Eine andere geometrische Deutung der Krümmung ergibt sich aus der Betrachtung der Kurvenkrümmung. Gegeben sei eine ebene Kurve und auf ihr drei Punkte p_1, p_2 und p_3 . Es sei die Kurvenkrümmung $\tilde{\kappa}(p_2) > 0$; siehe Abbildung 2.13. Durch p_1, p_2 und p_3 ist ein Kreis definiert. Im Grenzfall $p_1, p_3 \rightarrow p_2$ besitzt dieser Kreis den Radius $\tilde{r} = 1/\tilde{\kappa}(p_2)$ (*Krümmungsradius*). Dies sieht man wie folgt: Wir parametrisieren das Kurvenstück zwischen p_1 und p_3 mit ebenen Polarkoordinaten $(r(\phi), \phi)$. Es ist am Punkt p_2

$$\|d_s^2 \mathbf{x}\| = \|d_\phi \mathbf{u}\| \frac{d\phi}{ds} = \underbrace{\left\| \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{u} \right\|}_{=1} \frac{d\phi}{ds} = \frac{1}{\tilde{r}} \stackrel{!}{=} \tilde{\kappa}. \quad (2.105)$$

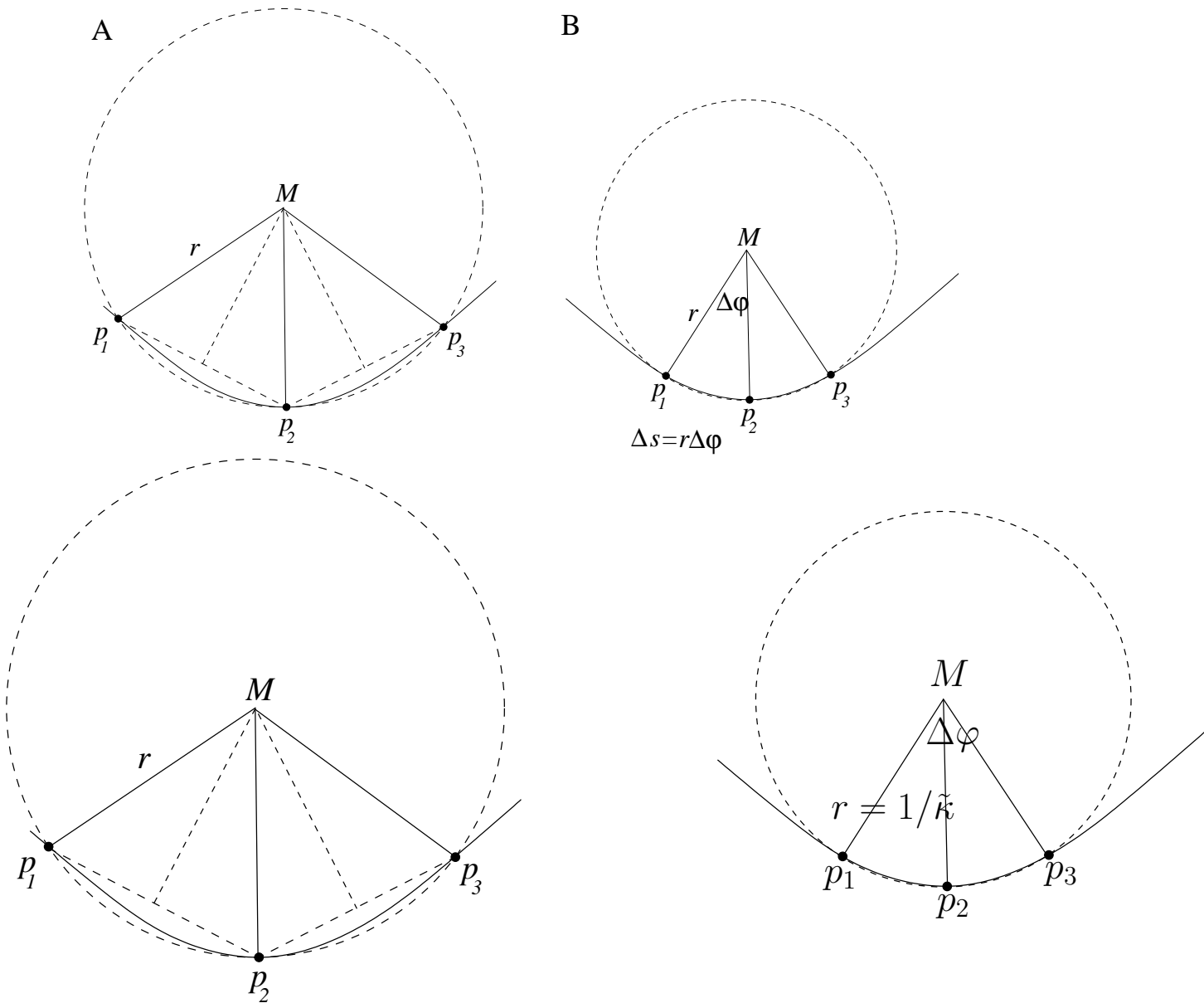


Abb. 2.13: **A.** Demonstration des Krümmungsradius. Durch drei Punkte p_1 , p_2 und p_3 geht ein Kreis; vgl. die angegebene Konstruktion, wo die Normalenvektoren, die p_1p_2 und p_2p_3 jeweils in zwei *gleiche* Teile teilen, den zugehörigen Mittelpunkt M bestimmen. Dank der Konstruktion gilt: $Mp_1 = Mp_2 = Mp_3 = r$. **B.** Wenn die beiden Punkte p_1 und p_3 sich an p_2 annähern, wird die Bahn zwischen ihnen einem Kreis mit Radius $r := \tilde{r} = 1/\tilde{\kappa}$ immer ähnlicher. In diesem Limes ist ein Kreisbogen *lokal* eine gute Annäherung an die Kurve, so dass $\Delta s = \tilde{r}\Delta\varphi$, wo $\Delta\varphi$ z. B. der Winkel zwischen Mp_1 und Mp_2 ist. Laut Definition der Kurven-Krümmung ist aber $\tilde{\kappa} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \Delta\varphi/\Delta s = 1/\tilde{r}$. Siehe auch Hilbert & Cohn-Vossen, §26.

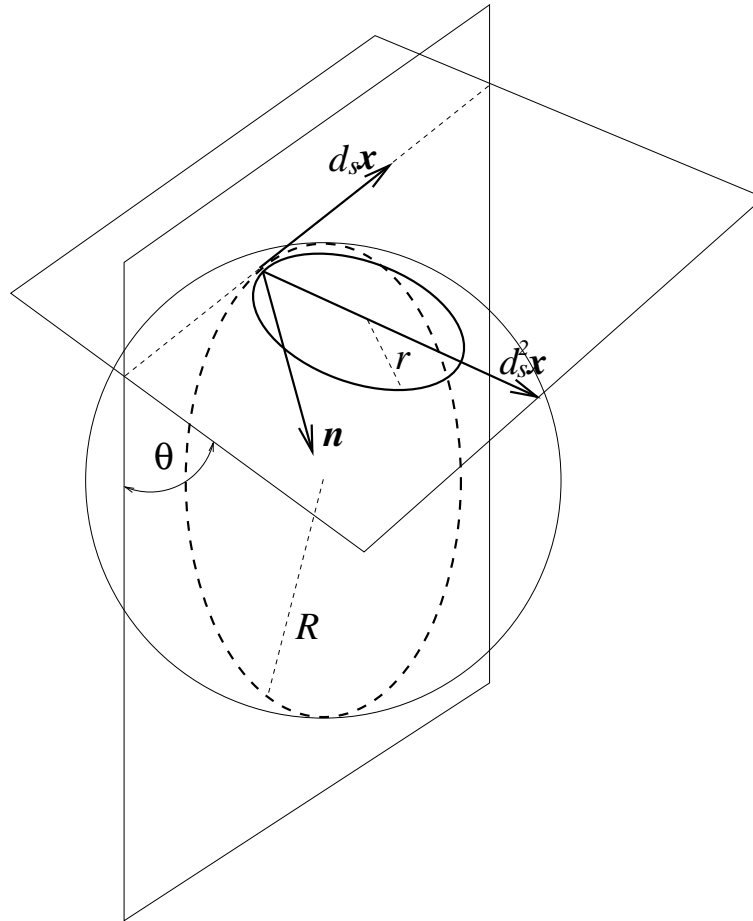


Abb. 2.14: Krümmungslinien mit unterschiedlicher Krümmung einer Kugeloberfläche und entsprechend unterschiedlichem Winkel zwischen Flächennormalenvektor \mathbf{n} und ihrem Krümmungsvektor. Der Winkel ist θ im einen Fall und 0 im anderen.

Das vorletzte Gleichheitszeichen gilt sofern es überhaupt einen Kreis mit Radius \tilde{r} gibt, der lokal bei p_2 durchlaufen wird. dass es ihn gibt, ist klar aus geometrischer Anschauung. Wir brauchen nur noch den Ursprung der Polarkoordinaten so zu wählen, dass $r(\phi(p_2)) = \tilde{r}$.

Was lernen wir daraus für die Krümmungen von Flächen? Betrachten wir eine Krümmungslinie, also eine ebene Kurve auf einer Fläche mit

$$d_s \mathbf{n} = -\kappa \mathbf{u} ,$$

deren Krümmungsvektor $\|d_s^2 \mathbf{x}\|$ mit dem Flächennormalenvektor \mathbf{n} einen Winkel θ einschließt; siehe Abbildung 2.14. Nach Theorem 2.2 von Meusnier und dem oben Gesagten gilt dann:

$$\kappa = \frac{\cos \theta}{R} . \quad (2.106)$$

Die Krümmung κ ist eine geometrische Eigenschaft der Sphäre.

Zum Schluß erwähnen wir noch eine interessante Beziehung zwischen g , H und $K =$

$Hg^{-1}H$ – vgl. (2.71) –, die nur für 2-dimensionale Mannigfaltigkeiten in $n = 3$ Dimensionen gilt, deshalb für die Membranphysik vorteilhaft sein kann.

Laut (2.54) genügen die Hauptkrümmungen κ_1 und κ_2 der Eigenwert-Gleichung

$$M\mathbf{v} := g^{-1/2}Hg^{-1/2}\mathbf{v} = \kappa\mathbf{v} , \tag{2.107}$$

wo M eine 2×2 matrix ist. Wie wir schon in (2.90) und (2.91) gesehen haben, lautet das zugehörige charakteristische Polynom

$$(\kappa - \kappa_1)(\kappa - \kappa_2) = \kappa^2 - \kappa \operatorname{tr}(M) + \det(M) = 0 . \tag{2.108}$$

Nach dem Satz von Cayley-Hamilton erfüllt auch M diese Gleichung:

$$M^2 - M\operatorname{tr}(g^{-1}H) + \det(g^{-1}H) = 0 . \tag{2.109}$$

Hier wurde auch ausgenutzt, dass $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$ sowie $\det(AB) = \det(BA)$. [Statt Cayley-Hamilton reicht es, (2.109) auf die beiden unabhängigen Eigenvektoren von M wirken zu lassen (warum?).] Unter Verwendung von (2.93) und nach Multiplikation von links und von rechts mit $g^{1/2}$ ergibt sich

$$K - \mathbb{H}H + \mathbb{K}g = 0 , \tag{2.110}$$

wo der Tensor K als Linearkombination von g und H erscheint.

2.11 Zwei bemerkenswerte Theoreme und ihre Grundformeln

Im Folgenden werden wir uns mit zwei Theoremen befassen: dem Gaußschen “Theorema egregium” und der Integralformel von Gauß und Bonnet. Ersteres wurde von Gauß deswegen für “herausragend” gehalten, weil es die Biegungsinvarianz des Gaußschen Krümmungsmaßes impliziert. Wir wenden uns dann den Mainardi-Codazzi Gleichungen und der eng damit verwandten Gaußschen Grundformel zu. Letztere führt uns zum Theorema egregium. Schließlich werden wir uns noch dem Gauß-Bonnet Theorem widmen, das sich mit der topologischen Invarianz des Oberflächen-Integrals des Gaußschen Krümmungsmaßes befasst und im Weiteren eine wichtige Rolle spielen wird.

2.11.1 Theorema egregium

Es sieht so aus, als ob man zur Berechnung des Gaußschen Krümmungsmaßes $\mathbb{K} = \det g^{-1}H$ [vgl. (2.93)] nicht nur g , sondern auch H bräuchte. Dem ist *nicht* so. Man kann \mathbb{K} durch E, F, G und deren Ableitungen bis zur 2. Ordnung ausdrücken (Den Beweis findet man im

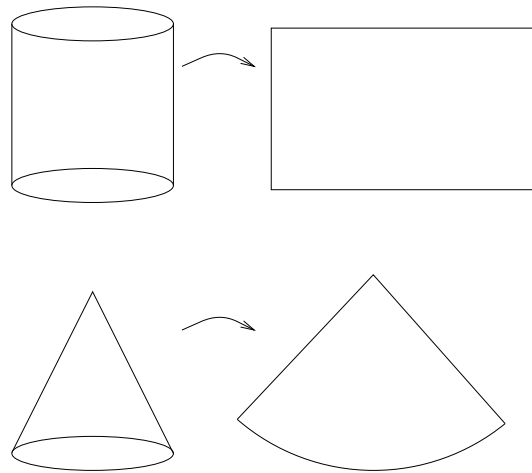


Abb.2.15: Das Ausrollen eines Zylinders und eines Kegels sind isometrische Transformationen ihrer Mantelflächen.

folgenden Unterabschnitt 2.11.2). Dieser Sachverhalt war Gauß schon 1816 bekannt, wurde von ihm aber erst 1826 allgemein hergeleitet. Das Gaußsche Argument war sehr langwierig. Einen aktuelleren Beweis für Oberflächen in drei Dimensionen findet man in R. Baltzer, Leipziger Ber., math. phys. Klasse, **18** (1866) 1–6 sowie bei Blaschke (§45).

Eine wichtige direkte Konsequenz des Gaußschen *Theorema egregium* ist die *Biegungsinvarianz* von \mathbb{K} , d. h. seine Invarianz unter längentreuen Transformationen. Diese heißen auch Isometrien und bezeichnen Verbiegungen von Flächen, die Längen konstant lassen. Beispiele sind das „Ausrollen“ von Zylinder und Kegel; siehe Abbildung 2.15. Sind nun zwei längentreu zugeordnete Flächen so auf Parameter (q^1, q^2) bezogen, dass entsprechenden Punkten diesselben Parameterwerte zugehören, so stimmen ihre 1. Grundformen, also E , F und G , überein. Aus der obigen Aussage folgt somit, dass das Gaußsche Krümmungsmaß \mathbb{K} in entsprechenden Punkten auf beiden Flächen gleich ist.

Da für Ebenen $\mathbb{K} = 0$ gilt, folgt dasselbe auch für Zylinder und Kegel. Es ist also jeweils überall $\det H = LN - M^2 = 0$. Das ergibt auch die geometrische Anschauung, denn es ist klar, dass eine der beiden Hauptkrümmungen $= 0$ ist.

2.11.2 Grundformeln von Mainardi, Codazzi und Gauß

Wenn wir die 2. Grundform $h_{\kappa\mu} = \mathbf{n} \partial_{\kappa\mu}^2 \mathbf{x}$ einmal nach q^λ differenzieren, erhalten wir

$$\partial_\lambda h_{\kappa\mu} = \partial_\lambda \mathbf{n} \partial_{\kappa\mu} \mathbf{x} + \mathbf{n} \partial_{\kappa\lambda\mu} \mathbf{x} . \quad (2.111)$$

Zur Vereinfachung der Notation werden wir im Folgenden die Potenzen der Differentiation weglassen und z.B. statt $\partial_{\kappa\mu}^2 \mathbf{x}$ einfach $\partial_{\kappa\mu} \mathbf{x}$ schreiben. Wir vertauschen λ und μ in (2.111), ziehen beide Gleichungen voneinander ab und erhalten, da $\partial_{\kappa\lambda\mu} \mathbf{x}$ symmetrisch in λ und μ ist,

$$\partial_\lambda h_{\kappa\mu} - \partial_\mu h_{\kappa\lambda} = \partial_\lambda \mathbf{n} \partial_{\kappa\mu} \mathbf{x} - \partial_\mu \mathbf{n} \partial_{\kappa\lambda} \mathbf{x} . \quad (2.112)$$

Laut Weingarten (§2.8.4) gilt $\partial_\lambda \mathbf{n} = -h_{\nu\lambda} \partial^\nu \mathbf{x}$, so dass wir (2.112) auch als

$$\partial_\lambda h_{\kappa\mu} - \partial_\mu h_{\kappa\lambda} = h_{\nu\mu} \underbrace{(\partial^\nu \mathbf{x} \partial_{\kappa\lambda} \mathbf{x})}_{:= \Gamma^\nu_{\kappa\lambda}} - h_{\nu\lambda} \underbrace{(\partial^\nu \mathbf{x} \partial_{\kappa\mu} \mathbf{x})}_{:= \Gamma^\nu_{\kappa\mu}} . \quad (2.113)$$

schreiben können. Es ist üblich, hier die Christoffel-Symbole (1869) der 2. Gattung einzuführen:

$$\Gamma^\nu_{\kappa\lambda} = \partial^\nu \mathbf{x} \partial_{\kappa\lambda} \mathbf{x} = \Gamma^\nu_{\lambda\kappa} \quad (2.114)$$

sowie

$$\Gamma_{\nu\kappa\lambda} = \partial_\nu \mathbf{x} \partial_{\kappa\lambda} \mathbf{x} = \Gamma_{\nu\lambda\kappa} = g_{\nu\rho} \Gamma^\rho_{\lambda\kappa} . \quad (2.115)$$

Damit erhalten wir die Gleichungen von **G. Mainardi** (1856) & **D. Codazzi** (1868/1880):

$$\partial_\lambda h_{\kappa\mu} - \Gamma^\nu_{\kappa\lambda} h_{\nu\mu} = \partial_\mu h_{\kappa\lambda} - \Gamma^\nu_{\kappa\mu} h_{\nu\lambda} . \quad (2.116)$$

Gauß kannte sie selbstverständlich schon (1827) in einer zwar nicht so ansprechenden Form wie (2.116), aber dennoch:

$$\partial_2 L - \partial_1 M = L\Gamma^1_{12} + M(\Gamma^2_{12} - \Gamma^1_{11}) - N\Gamma^2_{11} , \quad (2.117)$$

$$\partial_2 M - \partial_1 N = L\Gamma^1_{22} + M(\Gamma^2_{22} - \Gamma^1_{12}) - N\Gamma^2_{12} . \quad (2.118)$$

Wenden wir uns nun der Herleitung der Gaußschen Grundformel zu. Es gibt die eindeutige Zerlegung (siehe Abschnitt 2.2)

$$\partial_{\lambda\mu} \mathbf{x} = P \partial_{\lambda\mu} \mathbf{x} + c_{\lambda\mu} \mathbf{n} , \quad (2.119)$$

wo P auf den Tangentialraum $\mathcal{T}_x(\mathcal{M})$ in $\mathbf{x} \in \mathcal{M}$ projiziert und \mathbf{n} dessen Normalenvektor ist. Da \mathbf{x} ein regulärer Punkt ist (sein sollte), bilden die $\partial_\kappa \mathbf{x}$ eine Basis des Tangentialraumes und wir können nun dank (2.25)

$$\mathbb{I} = |\partial_\kappa \mathbf{x}\rangle \langle \partial^\kappa \mathbf{x}| \quad (2.120)$$

als Zerlegung der Einheit in $\mathcal{T}_x(\mathcal{M})$ benutzen:

$$P |\partial_{\lambda\mu} \mathbf{x}\rangle = |\partial_\kappa \mathbf{x}\rangle \langle \partial^\kappa \mathbf{x}| P |\partial_{\lambda\mu} \mathbf{x}\rangle = |\partial_\kappa \mathbf{x}\rangle \langle \partial^\kappa \mathbf{x}| \partial_{\lambda\mu} \mathbf{x}\rangle . \quad (2.121)$$

Mit (2.114) und $c_{\lambda\mu} = \mathbf{n} \partial_{\lambda\mu} \mathbf{x} = h_{\lambda\mu}$ ergibt sich sofort die **Gaußsche Grundformel**

$$\partial_{\lambda\mu} \mathbf{x} = \Gamma^\kappa_{\lambda\mu} \partial_\kappa \mathbf{x} + h_{\lambda\mu} \mathbf{n} , \quad (2.122)$$

die uns gleich einen wertvollen und relativ einfachen Beweis des Theorema egregium liefern wird.

Bei vorgegebener Mannigfaltigkeit stellen sich als Erstes die zugehörige 1. und 2. Grundform ein und die Mainardi-Codazzi Gleichungen sowie die Gaußsche Grundformel sind notwendige Bedingungen, die E , F und G sowie L , M und N mit einander verknüpfen. Bonnet

hat 1867 gezeigt, dass sie, falls $E > 0$, $G > 0$ und $EG - F^2 > 0$, auch hinreichend sind, um die Existenz einer regulären 2-dimensionalen Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^3 zu garantieren, welche $E - N$ als Koeffizienten ihrer 1. und 2. Grundform hat. Diese Mannigfaltigkeit ist bis auf Translation und Rotation sogar eindeutig bestimmt; für einen Beweis siehe z. B. Do Carmo's Anhang zu Kap. 4. Man nennt deshalb die Grundformeln von Mainardi, Codazzi und Gauß *Verträglichkeitsbedingungen*.

Beweis des Theorema egregium

Wir schreiben Formel (2.122) erst noch mal um,

$$\partial_{\beta\mu}\mathbf{x} = \Gamma^\nu_{\beta\mu}\partial_\nu\mathbf{x} + h_{\beta\mu}\mathbf{n} \quad (2.123)$$

und differenzieren das Resultat (2.123) nach q^λ :

$$\partial_{\beta\mu\lambda}\mathbf{x} = \Gamma^\nu_{\beta\mu}\partial_{\nu\lambda}\mathbf{x} + \partial_\kappa\mathbf{x}\partial_\lambda\Gamma^\kappa_{\beta\mu} + h_{\beta\mu}\partial_\lambda\mathbf{n} + \mathbf{n}\partial_\lambda h_{\beta\mu}, \quad (2.124)$$

so dass mit Hilfe der Christoffel-Symbole und der Definition (2.42) der 2. Grundform ein recht komplizierter Ausdruck erscheint:

$$\partial_\alpha\mathbf{x}\partial_{\beta\mu\lambda}\mathbf{x} = g_{\alpha\kappa}[\Gamma^\kappa_{\nu\lambda}\Gamma^\nu_{\beta\mu} + \partial_\lambda\Gamma^\kappa_{\beta\mu}] - h_{\alpha\lambda}h_{\beta\mu}. \quad (2.125)$$

Wir können wegen der Symmetrie im linken Glied λ und μ vertauschen [$\mathbf{x}(q^\mu)$ ist zumindest $3\times$ stetig differenzierbar] und erhalten

$$\boxed{h_{\alpha\lambda}h_{\beta\mu} - h_{\alpha\mu}h_{\beta\lambda} = g_{\alpha\kappa}\mathcal{R}^\kappa_{\beta\lambda\mu} = \mathcal{R}_{\alpha\beta\lambda\mu}}, \quad (2.126)$$

womit wir den *Riemannschen Tensor*

$$\mathcal{R}^\kappa_{\beta\lambda\mu} := \partial_\lambda\Gamma^\kappa_{\beta\mu} - \partial_\mu\Gamma^\kappa_{\beta\lambda} + \Gamma^\kappa_{\nu\lambda}\Gamma^\nu_{\beta\mu} - \Gamma^\kappa_{\nu\mu}\Gamma^\nu_{\beta\lambda}. \quad (2.127)$$

eingeführt haben. Wohlgermerkt, \mathcal{R} ist ein Tensor. Das Erstaunliche an (2.126) ist, dass links Elemente der 2. Grundform stehen und rechts nur Elemente des metrischen Tensors (1. Grundform) und dessen Ableitungen vorkommen (wieso?), die biegungsinvariant sind. ■

Korollar 1: Sei nun $\alpha = \lambda = 1$ und $\beta = \mu = 2$ sowie \mathcal{M} eine 2-dimensionale Mannigfaltigkeit in \mathbb{R}^3 ; also $n = 3$. Dann gilt

$$\det H = h_{11}h_{22} - h_{12}^2 = \mathcal{R}_{1212} \quad (2.128)$$

und damit ist auch

$$\mathbb{K} = \kappa_1\kappa_2 = \det H / \det g = \mathcal{R}_{1212} / \det g \quad (2.129)$$

biegungsinvariant. Dies ist die ursprüngliche Gaußsche Fassung des Theorema egregium.

Korollar 2: Die Mainardi-Codazzi Gleichungen sind eine direkte Konsequenz von (2.124). Vertausche dazu λ und μ in

$$\mathbf{n} \partial_{\beta\mu\lambda} \mathbf{x} = \Gamma^\nu_{\beta\mu} h_{\nu\lambda} + \partial_\lambda h_{\beta\mu} , \quad (2.130)$$

und ziehe beide Gleichungen von einander ab:

$$\partial_\lambda h_{\beta\mu} - \Gamma^\nu_{\beta\lambda} h_{\nu\mu} = \partial_\mu h_{\beta\lambda} - \Gamma^\nu_{\beta\mu} h_{\nu\lambda} .$$

Dies sind die Mainardi-Codazzi Gleichungen aus (2.116).

Aufgabe: Gauß hat gezeigt

$$\mathbb{K} = (2W)^{-1} \left\{ \partial_1 \left[W^{-1} \left(\frac{F}{E} \partial_2 E - \partial_1 G \right) + \partial_2 \left(2\partial_1 F - \partial_2 E - \frac{F}{E} \partial_1 E \right) \right] \right\}$$

mit $W = \sqrt{\det g}$. Verifiziere dies.

Man kann sich zum Schluss die Frage stellen, wie die Verallgemeinerung des Theorema egregium zu $n + 1$ Dimensionen mit $n > 2$ aussieht, da das Argument, das zu (2.126) führte, gar nicht von der Dimension abhängt. Beachten wir dazu Folgendes:

$$2\mathbb{K} = 2\kappa_1\kappa_2 = \underbrace{(\kappa_1 + \kappa_2)^2}_{\text{tr}(g^{-1}H) = h^\lambda_\lambda} - \underbrace{(\kappa_1^2 + \kappa_2^2)}_{\text{tr}(g^{-1}H)^2 = h^\lambda_\mu h^\mu_\lambda} \quad (2.131)$$

Wir konzentrieren uns deshalb auf

$$(\text{tr } g^{-1}H)^2 - \text{tr} (g^{-1}H)^2 = h^\lambda_\lambda h^\mu_\mu - h^\lambda_\mu h^\mu_\lambda . \quad (2.132)$$

Das rechte Glied lässt sich mittels (2.126) einfach umschreiben:

$$h^\lambda_\lambda h^\mu_\mu - h^\lambda_\mu h^\mu_\lambda = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\lambda} (h_{\alpha\lambda} h_{\beta\mu} - h_{\beta\lambda} h_{\alpha\mu}) = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\lambda} \mathcal{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} . \quad (2.133)$$

Daraus ergibt sich ein schöner Ausdruck,

$$(\text{tr } g^{-1}H)^2 - \text{tr} (g^{-1}H)^2 = -g^{\alpha\mu} g^{\beta\lambda} \mathcal{R}_{\alpha\beta\lambda\mu} , \quad (2.134)$$

dessen Interpretation dem Leser überlassen wird.

2.11.3 Das Theorem von Gauß-Bonnet

Sei \mathcal{M} eine orientierbare, geschlossene Fläche. Orientierbar heißt: Man kann sie in einfach zusammenhängende Flächenstücke zerlegen, die nur Kurvenbögen auf \mathcal{M} gemeinsam haben, und auf denen sich ein Umfahrungssinn so fest setzen läßt, dass jede Kante beim Umlauf beider von ihr begrenzter Flächenstücke in entgegengesetztem Sinne durchfahren wird (Gegenbeispiel: Möbiusband). Dann gilt:

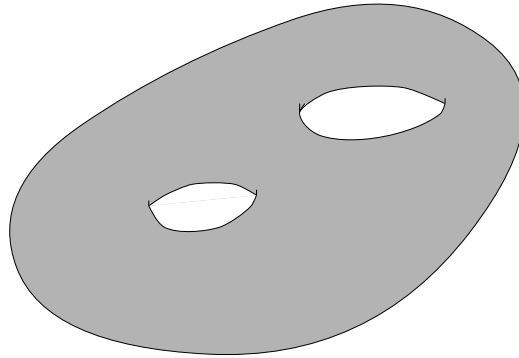


Abb. 2.16: Geschlossene Fläche vom Geschlecht 2.

Theorem 2.4 (C.F. Gauß, 1827; O. Bonnet, 1848)

$$\iint_{\mathcal{M}} df \, \mathbb{K} = 4\pi(1 - p) \quad (2.135)$$

Dabei ist $df = \sqrt{EG - F^2} dq^1 dq^2$ das Flächenelement und p das Geschlecht der Oberfläche.

Die Form des Flächenelements $df = \|\partial_1 \mathbf{x} \times \partial_2 \mathbf{x}\| dq^1 dq^2$ ergibt sich durch elementares Nachrechnen; vgl. (2.84) und (2.85). Das *Geschlecht* einer Oberfläche ist die Anzahl ihrer Henkel. Jede geschlossene Fläche ist topologisch äquivalent zu einer Kugel mit einer Anzahl solcher Henkel, oder Löcher. Die Kugel hat z. B. das Geschlecht 0, der Torus das Geschlecht 1; siehe Abbildung 2.16 für eine Oberfläche des Geschlechts 2.

Dies ist ein tiefes Theorem, welches uns erspart, das obige Integral explizit auszuführen. Faszinierend ist, dass es dabei eben nicht auf die genaue Form der Oberfläche ankommt, sondern nur auf ihr Geschlecht. Man bezeichnet dieses Integral daher als eine *topologische Invariante*.

Kapitel 3

Energiefunktionale zur Beschreibung der Membranform

Wir wollen in diesem Kapitel zunächst einige Grundbegriffe der Elastizitätstheorie einführen, um sie dann schließlich, zusammen mit dem im letzten Kapitel Erarbeiteten, auf unser Problem der Formbestimmung von Vesikeln anzuwenden. Eine Membran wird dabei als elastische Platte behandelt werden.

Im gesamten Kapitel finden sämtliche geometrische Betrachtungen in einem 3-dimensionalen Raum (dem Ortsraum) statt. Alle Tensorkomponenten beziehen sich auf eine dort gewählte kartesische Basis. Da in diesem Fall die Metrik gerade die Einheitsmatrix ist, unterscheiden sich ko- und kontravariante Komponenten von Tensoren nicht. Wir wollen deshalb auch in unserer Notation nicht willkürlich zwischen ihnen unterscheiden und verwenden daher nur noch untere Indizes. Die Summenkonvention besagt also jetzt, daß

$$x_i y_i \equiv \sum_i x_i y_i .$$

Wir schreiben auch verkürzt

$$x_i^2 \equiv x_i x_i$$

(z. B. $dx_i^2 \equiv dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2$) und weisen darauf hin, wenn dies stattdessen für x_1^2 usw. stehen soll.

Literatur zur Elastizitätstheorie:

- L.D. LANDAU & I.M. LIFSCHITZ, BAND VII
Elastizitätstheorie

3.1 Einführung in die Elastizitätstheorie

3.1.1 Der Verzerrungstensor

Es geht hier um die reine Geometrie von Deformationen. Sei $\mathbf{u} = \mathbf{x}' - \mathbf{x}$ ein Deformationsvektor, wobei \mathbf{x} einen Ort eines Körpers vor, \mathbf{x}' nach der Deformation bezeichnet. Die Orte vor und nach der Deformation hängen also über

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{u}(\mathbf{x}) \quad (3.1)$$

zusammen. Mit

$$dx'_i = dx_i + du_i \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.2)$$

ergibt sich für die quadrierten Längenelemente der Zusammenhang

$$\begin{aligned} dl'^2 &= dx_i'^2 = (dx_i + du_i)^2 = \left(dx_i + \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k\right)^2 \\ &\equiv (dx_i + \partial_k u_i dx_k)^2 = dx_i^2 + 2dx_i \partial_k u_i dx_k + \partial_k u_i dx_k \partial_l u_i dx_l. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Damit der Ausdruck symmetrischer in den Indizes wird, benutzen wir

$$2dx_i \partial_k u_i dx_k = (\partial_k u_i + \partial_i u_k) dx_i dx_k$$

und schreiben (3.3) weiter

$$dl'^2 = dl^2 + (\partial_k u_i + \partial_i u_k) dx_i dx_k + \partial_k u_i \partial_l u_l dx_k dx_i = dl^2 + 2u_{ik} dx_i dx_k = (\delta_{ik} + 2u_{ik}) dx_i dx_k, \quad (3.4)$$

mit

$$u_{ik} := \frac{1}{2} (\partial_k u_i + \partial_i u_k + \partial_i u_l \partial_k u_l). \quad (3.5)$$

Der symmetrische Tensor $U = (u_{ik})$ heißt *Verzerrungstensor*. Da U reell-symmetrisch ist, gibt es eine orthogonale Eigenbasis bzgl. der $U = \text{diag}(u^{(1)}, u^{(2)}, u^{(3)})$. In dieser Basis gilt freilich auch

$$dl'^2 = (1 + 2u^{(1)}) dx_1^2 + (1 + 2u^{(2)}) dx_2^2 + (1 + 2u^{(3)}) dx_3^2. \quad (3.6)$$

Für ein Längenelement dl_i entlang der i -ten Hauptrichtung ist insbesondere

$$dl'_i = \sqrt{1 + 2u^{(i)}} dl_i \quad (\text{nicht summiert}). \quad (3.7)$$

Der Verzerrungstensor – und seine Eigenvektoren und Eigenwerte – sind im Allgemeinen Ortsabhängig.

Da gewöhnlich die $\partial_k u_i \ll 1$ sind, betrachtet man häufig den *linearisierten Verzerrungstensor*

$$u_{ik} \approx \frac{1}{2} (\partial_k u_i + \partial_i u_k). \quad (3.8)$$

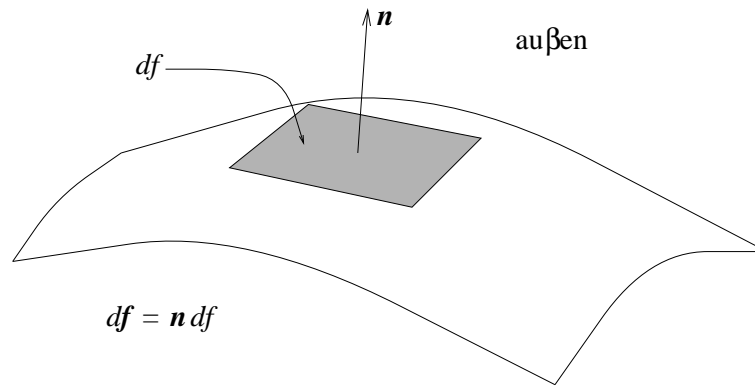


Abb. 3.1: Flächenelement. Der Vektor $d\mathbf{f}$ ist parallel zu \mathbf{n} und damit orthogonal zur Oberfläche.

Aus dem gleichen Grund sind meist auch die Eigenwerte $u^{(i)} \ll 1$. Mit (3.7) können wir dann schreiben

$$\frac{dl'_i - dl_i}{dl_i} = \sqrt{1 + 2u^{(i)}} - 1 \approx u^{(i)}. \quad (3.9)$$

Die Eigenwerte $u^{(i)}$ beschreiben demnach die *relative Längenänderungen* entlang der Hauptachsen unter der Deformation.

Wir betrachten ein Volumen vor und nach der Deformation. Es ist

$$\int_{\text{nachher}} dV' = \int_{\text{vorher}} dV \det \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right), \quad (3.10)$$

wobei dV' das deformierte und dV das undeformierte Volumenelement bedeuten und „nachher“ das Integrationsgebiet nach der Deformation, „vorher“ das vor der Deformation meint. Wir entwickeln die Funktionaldeterminante der Transformation (3.1) bis zur ersten Ordnung in den $\partial_k u_i$ und erhalten gemäß (3.8)

$$\det \left(\frac{\partial x'_i}{\partial x_j} \right) \approx 1 + \partial_i u_i = 1 + \text{tr } U. \quad (3.11)$$

Für kleine Deformationen ist somit die *relative Volumenänderung*

$$\frac{dV' - dV}{dV} = \text{tr } U. \quad (3.12)$$

3.1.2 Der Spannungstensor

Wir widmen uns nun den Kräften, die mit einer Deformation einhergehen: Die *inneren Spannungen* sind die Kräfte, die einen Körper in die Gleichgewichtslage zurück formen, sofern keine Gegenkräfte anliegen. Sie werden durch kurzreichweitige Molekularkräfte (Reichweite \approx nm) hervorgerufen. Man sagt, innere Spannungen sind *Nahwirkungskräfte*.

Im Folgenden bezeichne K einen Körper, ΔK einen beliebigen Teil davon und $\partial(\Delta K)$ seine Oberfläche. Wir wollen die Kraft aufgrund innerer Spannungen auf einen Körperteil

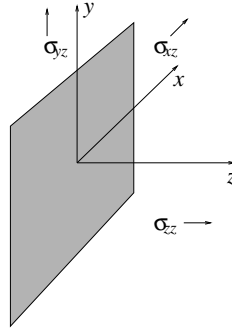


Abb. 3.2: Die Kraft auf diese Einheitsfläche ist $(\sigma_{xz}, \sigma_{yz}, \sigma_{zz})$. σ_{xz} und σ_{yz} wirken tangential, σ_{zz} wirkt normal zur Fläche.

ΔK angeben. Wegen *actio* = *−reactio* verschwindet die Summe über Kräfte im Inneren dieses Volumens. Die resultierende Kraft auf ΔK muß über die Oberfläche $\partial(\Delta K)$ ausgetauscht werden (Nahwirkung!). Es muß also gelten:

$$\text{Kraft auf } \Delta K = \int_{\Delta K} \mathbf{F} dV \stackrel{!}{=} \int_{\partial(\Delta K)} \mathbf{F}_o d\mathbf{f}. \quad (3.13)$$

Dabei sind \mathbf{F} und \mathbf{F}_o die Volumen- bzw. Oberflächendichte der Kräfte. Damit sich das Volumenintegral als Oberflächenintegral schreiben läßt, muß $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ von der Form

$$\boxed{F_i =: \partial_k \sigma_{ik} = \text{div } \boldsymbol{\sigma}_i} \quad (3.14)$$

sein, mit einem (ortsabhängigen) Tensor (σ_{ik}) . Dann können wir mit dem Gaußschen Integralsatz schreiben

$$\int_{\Delta K} F_i dV = \int_{\Delta K} \partial_k \sigma_{ik} dV = \int_{\partial(\Delta K)} \sigma_{ik} df_k. \quad (3.15)$$

Dabei sind df_k die Komponenten des (lokalen) vektoriellen Flächenelementes; siehe Abbildung 3.1. Der Tensor (σ_{ik}) heißt *Spannungstensor*; er hat die physikalische Dimension N/m². Offenbar ist $\sigma_{ik} df_k$ die *i*-Komponente der auf df wirkenden Kraft, oder σ_{ik} die *i*-Komponente der Kraft pro zur *k*-Richtung senkrechten Flächeneinheit. In Abbildung 3.2 ist also σ_{zz} die Kraft, die senkrecht zum Flächenelement wirkt, σ_{xz} und σ_{yz} sind die Tangentialkräfte in *x*- bzw. *y*-Richtung, jeweils pro Flächeneinheit.

Im Fall einer gleichmäßigen Kompression eines Körpers mit Druck p ist die Kraft auf ein Flächenelement gegeben durch $-p d\mathbf{f}$. Ihre *i*-Komponente ist somit

$$-p df_i = -p \delta_{ik} df_k \stackrel{\text{Def.}}{=} \sigma_{ik} df_k,$$

d. h. $\sigma_{ik} = -p \delta_{ik}$ für die gleichmäßige Kompression. Insbesondere ist der Spannungstensor hier symmetrisch.

Im Allgemeinen gibt es natürlich auch Tangentialkräfte, die parallele Flächenelemente relativ zu einander zu verschieben suchen. Wir zeigen, dass der Spannungstensor in jedem Fall

symmetrisch ist. Dazu betrachten wir das auf einen Körperteil ΔK wirkende Drehmoment

$$\int_{\Delta K} \mathbf{r} \times \mathbf{F} dV,$$

bzw. die Komponenten des entsprechenden (antisymmetrischen) Tensor

$$M_{ik} = \int_{\Delta K} (F_i x_k - F_k x_i) dV. \quad (3.16)$$

Mit Hilfe von (3.14) sowie mit $\partial x_i / \partial x_j = \delta_{ij}$ schreiben wir weiter

$$\begin{aligned} M_{ik} &= \int_{\Delta K} [(\partial_j \sigma_{ij}) x_k - (\partial_j \sigma_{kj}) x_i] dV = \int_{\Delta K} \partial_j (\sigma_{ij} x_k - \sigma_{kj} x_i) dV - \int_{\Delta K} (\sigma_{ik} - \sigma_{ki}) dV \\ &\stackrel{\text{Gauß}}{=} \int_{\partial(\Delta K)} (\sigma_{ij} x_k - \sigma_{kj} x_i) df_j - \int_{\Delta K} (\sigma_{ik} - \sigma_{ki}) dV. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Nun argumentieren wir wie schon für die Kräfte: Das auf ΔK wirkende Drehmoment muß sich als Oberflächenintegral schreiben lassen. Folglich muß das Volumenintegral in (3.17) identisch verschwinden, d. h. $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$, was wir zeigen wollten.

Der nach (3.14) definierte Spannungstensor genügt im *Gleichgewicht* ohne externe Kräfte der Gleichung

$$\mathbf{F} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_k \sigma_{ik} = 0 \quad (\text{im Inneren von } K), \quad (3.18)$$

im Schwerfeld (Dichte ρ , Schwerebeschleunigung \mathbf{g})

$$\mathbf{F} + \rho \mathbf{g} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \partial_k \sigma_{ik} + \rho g_i = 0 \quad (\text{im Inneren von } K). \quad (3.19)$$

Ein Druck \mathbf{p} auf der Körperoberfläche mit Normalenvektor $\mathbf{n} = (n_k)$ setzt die *Randbedingungen*

$$p_i df - \sigma_{ik} \underbrace{df_k}_{n_k df} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad p_i = \sigma_{ik} n_k \quad (\text{auf der Oberfläche von } K). \quad (3.20)$$

Man kann aus dem Druck auch den Mittelwert der σ_{ik} ausrechnen: Im Gleichgewicht mit $\mathbf{F} = 0$ ist nämlich

$$0 = \int_K \underbrace{\partial_l \sigma_{il}}_{=0} x_k dV = \int_K \partial_l (\sigma_{il} x_k) dV - \int_K \sigma_{il} \underbrace{\partial_l x_k}_{\delta_{lk}} dV = \int_{\partial K} x_k \underbrace{\sigma_{il} n_l}_{p_i} df - \int_K \sigma_{ik} dV, \quad (3.21)$$

so dass (Körpervolumen V)

$$\int_{\partial K} p_i x_k df = \int_K \sigma_{ik} dV =: V \bar{\sigma}_{ik} \quad (3.22)$$

oder

$$\bar{\sigma}_{ik} = \frac{1}{2V} \int_{\partial K} (x_i p_k + x_k p_i) df. \quad (3.23)$$

Wenn wir später dünne Platten betrachten (eine Körperdimension geht gegen 0), wird der Spannungstensor die physikalische Dimension N/m besitzen.

3.2 Thermodynamik der Deformation

3.2.1 Die Deformationsarbeit

Wir betrachten irgendeinen deformierten Körper ($\mathbf{u} \neq 0$), überlassen ihn sich selbst, so dass sich die Deformation ändert gemäß

$$\mathbf{u} \longrightarrow \mathbf{u} + \delta \mathbf{u},$$

und bestimmen die dabei von den Spannungskräften geleistete Arbeit:

$$\int_K \underbrace{\delta R}_{\text{Arbeitsdichte}} dV = \int_K \mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u} dV = \int_K (\partial_k \sigma_{ik}) \delta u_i dV = \int_{\partial K} \sigma_{ik} \delta u_i df_k - \int_K \sigma_{ik} \partial_k \delta u_i dV. \quad (3.24)$$

Weiter denken wir uns den Körper unendlich ausgedehnt und im Unendlichen nicht deformiert. Dann verschwindet das Oberflächenintegral und man erhält für die Arbeit (unter Berücksichtigung von $\sigma_{ik} = \sigma_{ki}$)

$$\begin{aligned} \int_K \delta R dV &= -\frac{1}{2} \int_K \sigma_{ik} (\partial_k \delta u_i + \partial_i \delta u_k) dV \\ &= -\frac{1}{2} \int_K \sigma_{ik} \delta (\partial_k u_i + \partial_i u_k) dV = - \int_K \sigma_{ik} \delta u_{ik} dV. \end{aligned} \quad (3.25)$$

Das letzte Gleichheitszeichen gilt im Rahmen der linearen Näherung (3.8) für den Verzerrungstensor. Für die Dichte der geleisteten Arbeit gilt dann offenbar:

$$\delta R = -\sigma_{ik} \delta u_{ik}. \quad (3.26)$$

Wir betrachten nur *elastische* Deformationen, d. h. der Körper nimmt nach Abschalten der externen Kräfte seine ursprüngliche Form wieder an. Ist die Änderung auch im thermodynamischen Sinne *reversibel*, also so langsam, dass sich das Gesamtsystem ständig im thermodynamischen Gleichgewicht befindet, so gilt:

$$dE = dQ - dR \stackrel{\text{rev.}}{=} T dS - dR.$$

Dabei sind E , Q und S die Energie-, Wärme und Entropie-*Dichten*. Mit (3.26) ergibt sich nun

$$dE = T dS + \sigma_{ik} du_{ik}. \quad (3.27)$$

Für unser Beispiel der hydrostatischen Kompression mit $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$ ist $dR = \sigma_{ik} du_{ik} = -p du_{ii}$. Betrachten wir ein Einheitsvolumen, so ergibt sich für die Volumenänderung durch die Deformation \mathbf{u} nach (3.12)

$$\delta V = \text{tr } U. \quad (3.28)$$

Für infinitesimales δV wollen wir in Zukunft dV schreiben (nicht mit dem Volumenelement verwechseln!). Es ist dann auch $\text{tr } U = u_{ii}$ infinitesimal klein und (3.28) lautet $dV = du_{ii}$. Wir erhalten somit die vertraute Gleichung

$$dE = T dS - p dV. \quad (3.29)$$

3.2.2 Die freie Energie bei konstanter Temperatur

Die Größe, die uns interessiert, ist die Dichte der freien Energie

$$F = E - TS \quad \stackrel{(3.27)}{\iff} \quad dF = -S dT + \sigma_{ik} du_{ik}. \quad (3.30)$$

Insbesondere ist

$$\sigma_{ik} = \left(\frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right)_T. \quad (3.31)$$

Wir benötigen die freie Energie als Funktion $F = F(\mathbf{u}(\mathbf{x}), T)$ für $\mathbf{x} \in K$.

Die betrachteten Prozesse seien zunächst isotherm. Im Gleichgewicht ohne äußere Kräfte bei einer beliebigen, festen Temperatur T_0 liege per Definition der undeformierte Zustand ($\mathbf{u} \equiv 0$) vor¹:

$$u_{ik} = 0 \quad \Rightarrow \quad \sigma_{ik} = 0 \quad \stackrel{(3.31)}{\Rightarrow} \quad \left. \frac{\partial F}{\partial u_{ik}} \right|_{U=0} = 0. \quad (3.32)$$

Um diesen undeformierten Zustand entwickeln wir F nach Potenzen von u_{ik} unter Ausnutzung der Kleinheit der Deformation bis zur 2. Ordnung. Der konstante Beitrag interessiert uns nicht. Wegen (3.32) verschwindet die 1. Ordnung. Wir erwarten also eine freie Energie der Form

$$F = \frac{1}{2} u_{ik} F_{ik,jl} u_{jl} + \dots,$$

mit $F_{ik,jl} = F_{jl,ik}$. Glücklicherweise können wir aber durch Symmetrie-Überlegungen die Form von F erheblich weiter einschränken. Da nämlich die Körper, die wir betrachten, als isotrop vorausgesetzt werden (also insbesondere keine Kristalle sind), soll F invariant unter orthogonalen Transformationen des Raumes sein. Aus dem letzten Kapitel, Abschnitt 2.5, wissen wir, wie man invariante Größen aus Tensoren konstruiert: durch Verjüngung. Die Tensoren, mit denen wir es hier zu tun haben, besitzen das charakteristische Transformationsverhalten unter genau den orthogonalen Transformationen² (nicht unter allgemeinen Transformationen wie die im letzten Kapitel betrachteten Tensoren). Skalare 2. Ordnung in u_{ik} bzgl. dieser Transformationen erhält man folglich aus $(u_{ii})^2 = (\text{tr } U)^2$ und $u_{ik}u_{ik} = \text{tr } U^2$. Wir können daher die freie Energie schreiben als

$$F = \frac{1}{2} \lambda (u_{ii})^2 + \mu u_{ik}u_{ik} + \dots \quad (3.33)$$

Die Koeffizienten λ und μ sind bekannt als die *Lamé-Koeffizienten*.

Wir wollen zwei Arten von Deformation ($U \neq 0$) herausstellen. Zum Einen den Fall

- $u_{ii} = 0$, was nach (3.28) bedeutet, dass sich das Volumen nicht ändert, also ändert sich nur die Form: eine *reine Scherung*; zum Anderen

¹Die Deformation $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, und damit der Verzerrungstensor U , sind ja nur relativ zu einem Referenzzustand definiert.

²d. h. isometrischen Transformationen

- $u_{ik} = \text{const.} \delta_{ik}$, was eine Volumenänderung bedeutet ohne Formänderung: eine *homogene Dilatation* oder eine *hydrostatische Kompression*.

Jede Deformation kann geschrieben werden als Summe aus einer reinen Scherung und einer homogenen Dilatation:

$$u_{ik} = \underbrace{u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}}_{\text{reine Scherung}} + \underbrace{\frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll}}_{\text{homogene Dilatation}}. \quad (3.34)$$

Wenn man diese Zerlegung des Verzerrungstensors in (3.33) einbringt und umformt, so erhält man

$$F = \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3}\delta_{ik}u_{ll} \right)^2 + \frac{k}{2}(u_{ll})^2, \quad (3.35)$$

mit $k = \lambda + \frac{2}{3}\mu$. Man bezeichnet μ als *Torsionsmodul* und k als *Kompressionsmodul*.

Da ohne äußere Kräfte das thermodynamische Gleichgewicht bei $u_{ik} = 0$ liegen soll, muß F an dieser Stelle minimal sein. F darf also weder durch eine reine Scherung noch durch eine homogene Dilatation erniedrigt werden. Daraus folgt $\mu > 0$ und $k > 0$.

Da F in der betrachteten Näherung eine homogene Funktion 2. Ordnung in den u_{ik} ist, gilt nach Euler:

$$u_{ik} \underbrace{\partial_{u_{ik}} F}_{\sigma_{ik}} = 2F \quad \Longrightarrow \quad F = \frac{1}{2}\sigma_{ik}u_{ik}. \quad (3.36)$$

Die Aufspaltung (3.34) des Verzerrungstensors in reine Scherungen und homogene Dilatationen läßt sich übrigens mit einer schönen mathematischen Struktur unterlegen: Definiert man für zwei quadratische Matrizen A und B das Skalarprodukt nach Hilbert-Schmidt

$$\langle A, B \rangle := \text{tr } A^\dagger B,$$

so gilt:

$$\langle \text{reine Scherung, homogene Dilatation} \rangle = 0.$$

3.2.3 Das Hookesche Gesetz

Wir interessieren uns für einen Zusammenhang zwischen (u_{ik}) und (σ_{ik}) , analog dem Zusammenhang zwischen Expansion und Kraft bei einer Feder, wie er durch das *Hookesche Gesetz* beschrieben wird. Dazu betrachten wir bei konstanter Temperatur und unter Berücksichtigung von (3.35)

$$dF = ku_{ll} du_{ll} + 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik} \right) d \left(u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik} \right)$$

$$= \left[k u_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik} \right) \right] du_{ik} \stackrel{!}{=} \sigma_{ik} du_{ik}. \quad (3.37)$$

Das zweite Gleichheitszeichen gilt wegen

$$\left(u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik} \right) \delta_{ik} = 0,$$

das dritte wegen (3.31). Aus (3.37) lesen wir nun ab:

$$\sigma_{ik} = k u_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik} \right). \quad (3.38)$$

Insbesondere ist

$$\sigma_{ll} = 3k u_{ll}, \quad (3.39)$$

sowie

$$\sigma_{ik} = 2\mu u_{ik} \quad \text{für } i \neq k. \quad (3.40)$$

Daraus findet man die Umkehrung von (3.38):

$$\boxed{u_{ik} = \frac{1}{9k} \sigma_{ll} \delta_{ik} + \frac{1}{2\mu} \left(\sigma_{ik} - \frac{1}{3} \sigma_{ll} \delta_{ik} \right)}. \quad (3.41)$$

Tatsächlich sind in Verallgemeinerung des Hookeschen Gesetzes (und in der betrachteten Näherung) die Spannungen *linear* in den Deformationen. Es fällt außerdem auf, dass (3.38) und (3.41) die gleiche Form haben.

Die Beziehung (3.39) führt im Fall der hydrostatischen Kompression $\sigma_{ik} = -p\delta_{ik}$ auf $u_{ll} = -p/k$. Für einen Druck δp , der mit einer Volumenänderung δV einhergeht, können wir mit (3.28) schreiben

$$\frac{\delta V}{V} = -\frac{\delta p}{k} \quad \xrightarrow{\delta p \rightarrow 0} \quad k^{-1} = -\frac{1}{V} \left(\frac{\partial V}{\partial p} \right)_T. \quad (3.42)$$

Die Materialkonstante k^{-1} heißt deshalb *Kompressibilität*.

3.2.4 Homogene Deformationen

Homogene Deformationen sind solche, bei denen der Verzerrungstensor ortsunabhängig ist. Wegen (3.38) ist dann auch der Spannungstensor konstant. Diese Größen können somit allein aus den Randbedingungen bestimmt werden.

Als Beispiel betrachten wir die *einfache Streckung* eines Stabes; siehe Abbildung 3.3. Nach (3.20) gelten hier die Randbedingungen

$$\begin{aligned} \sigma_{ik} n_k &= 0 & \text{auf den Seitenflächen } [\mathbf{n} = \pm(1, 0, 0) \text{ bzw. } \mathbf{n} = \pm(0, 1, 0)], \\ \sigma_{ik} n_k &= \pm \delta_{i3} p & \text{auf Grund- und Deckfläche } [\mathbf{n} = \pm(0, 0, 1)]. \end{aligned} \quad (3.43)$$

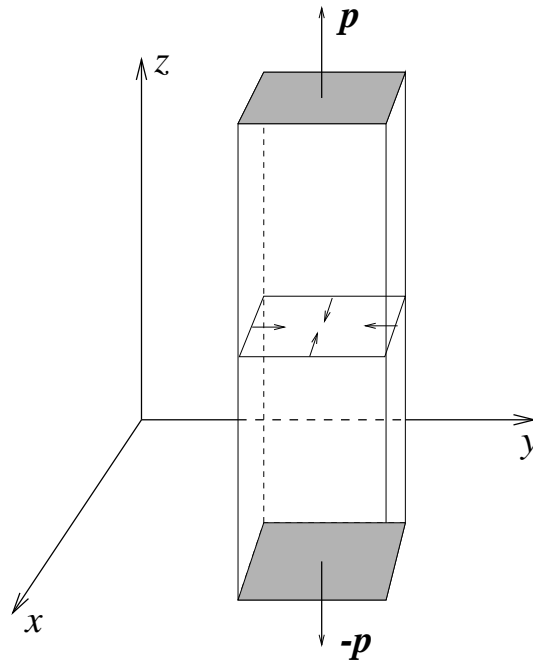


Abb. 3.3: Streckung eines Stabes

Daraus ergibt sich $\sigma_{zz} = p$ und $\sigma_{ik} = 0$ für alle anderen Komponenten. Mit (3.41) folgt weiter:

$$\begin{aligned}
 u_{ik} &= 0 \quad \text{für } i \neq k \\
 u_{xx} &= -\frac{1}{3} \left(\frac{1}{2\mu} - \frac{1}{3k} \right) p \\
 u_{yy} &= u_{xx} \\
 u_{zz} &= \frac{1}{3} \left(\frac{1}{3k} + \frac{1}{\mu} \right) p
 \end{aligned} \tag{3.44}$$

Man definiert das *Elastizitätsmodul* oder die *Youngsche Zahl*

$$E := \frac{9k\mu}{3k + \mu}, \tag{3.45}$$

so daß

$$u_{zz} = \frac{p}{E}. \tag{3.46}$$

Nach (3.9) gibt u_{zz} die *relative Verlängerung* des Stabes, u_{xx} und u_{yy} seine *relative Querkontraktion*. Man beschreibt den Zusammenhang zwischen beiden durch

$$u_{xx} = u_{yy} =: -\sigma u_{zz} \iff \sigma = \frac{1}{2} \frac{3k - 2\mu}{3k + \mu} \tag{3.47}$$

und nennt σ den *Querkontraktionskoeffizienten* oder die *Poissonsche Zahl*. Mathematisch ist $-1 \leq \sigma < \frac{1}{2}$, physikalisch wird σ aber nie negativ, da längs und quer zur Streck-/Stauch-Achse die Deformationen stets unterschiedliche Vorzeichen haben.

In Übereinstimmung mit (3.39) ist die relative Volumenänderung $u_{ll} = p/3k$. Wenn am Stab gezogen wird, d. h. $p > 0$, vergrößert sich – trotz Querkontraktion – demnach sein Volumen.

Im gestreckten Zustand ergibt sich die freie Energie aus (3.36) und den obigen Werten für die u_{ik} und σ_{ik} zu

$$F = \frac{p^2}{2E}. \quad (3.48)$$

Wir können bisherige Gleichungen mit den neuen Materialkonstanten schreiben. Es ist

$$\mu = \frac{E}{2(1+\sigma)}, \quad k = \frac{E}{3(1-2\sigma)}. \quad (3.49)$$

Damit erhalten wir aus (3.35), (3.38) bzw. (3.41):

$$\boxed{\begin{aligned} F &= \frac{E}{2(1+\sigma)} \left(u_{ik}u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}(u_{ll})^2 \right) \\ \sigma_{ik} &= \frac{E}{1+\sigma} \left(u_{ik} + \frac{\sigma}{1-2\sigma}u_{ll}\delta_{ik} \right) \\ u_{ik} &= \frac{1+\sigma}{E} \left(\sigma_{ik} - \frac{\sigma}{1+\sigma}\sigma_{ll}\delta_{ik} \right) \end{aligned}} \quad (3.50)$$

3.2.5 Deformationen bei veränderlicher Temperatur

Wir betrachten nun Deformationen, die mit einer Temperaturänderung verbunden sind. Diese kann sowohl eine Folge der Deformation als auch äußere Ursache sein.

Der nicht-deformierte Zustand sei wieder im Gleichgewicht bei einer Temperatur T_0 und in Abwesenheit äußerer Kräfte definiert. Bei einer Temperatur $T \neq T_0$ wird im allgemeinen eine Deformation auftreten, z. B. eine Wärmeausdehnung. Wir erwarten also jetzt bei einer Entwicklung von F nach Potenzen von u_{ik} das Auftreten von temperaturabhängigen *linearen* Termen. Wenn wir uns auf $|T - T_0| \ll T_0$ beschränken und die gleichen Symmetrieüberlegungen wie in Unterabschnitt 3.2.2 anstellen, dann kommen wir auf die Form

$$F((u_{mn}), T) = F_0(T) - k\alpha(T - T_0)u_{ll} + \mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik} \right)^2 + \frac{k}{2}(u_{ll})^2. \quad (3.51)$$

Man beachte, dass mit Ausnahme von $F_0(T)$ alle Summanden rein quadratisch in sämtlichen Änderungen sind. Mit (3.31) folgt dann

$$\sigma_{ik} = (\partial_{u_{ik}} F)_T = -k\alpha(T - T_0)\delta_{ik} + ku_{ll}\delta_{ik} + 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3}u_{ll}\delta_{ik} \right). \quad (3.52)$$

Diese Gleichung gibt das geforderte Verhalten wieder, dass eine Temperaturänderung ($T \neq T_0$) zu zusätzlichen inneren Spannungen führen kann. Jedoch sollen bei einer reinen Wärmeausdehnung (also bei Abwesenheit äußerer Kräfte) *keine* Spannungen auftreten ($\sigma_{ik} = 0$).

Gleichung (3.52) impliziert für diesen Fall $u_{ik} = \text{const.} \delta_{ik}$. Nehmen wir die Diagonalelemente von (3.52)

$$\underbrace{\sigma_{ii}}_{\substack{\text{hier keine} \\ \text{Summe!}}} = -k\alpha(T - T_0) + ku_{ll} \stackrel{!}{=} 0, \quad (3.53)$$

so folgt als Bedingung für α

$$u_{ll} = \alpha(T - T_0). \quad (3.54)$$

Daher nennt man α den *Wärmeausdehnungskoeffizienten*.

Speziell für eine *isotherme Deformation* ($T = T_0$) erhalten wir freilich wieder unsere früheren Gleichungen zurück. Der Prozeß ist bestimmt durch k und μ . Deswegen bezeichnet man k und μ auch als *isotherme Moduln*.

Bei einer *adiabatischen Deformation* findet zwischen den verschiedenen Teilen des Körpers und zwischen Körper und Umgebung kein Wärmeaustausch statt, so dass die Entropie sich nicht ändert. Es gilt:

$$S((u_{mn}), T) = -(\partial_T F)_{(u_{mn})} \stackrel{(3.51)}{=} S_0(T) + k\alpha u_{ll} \stackrel{!}{=} S_0(T_0) = S_0(T_0). \quad (3.55)$$

Daraus ergibt sich in 1. Näherung $T - T_0 \propto u_{ll}$, so dass man schreiben kann

$$\sigma_{ik} = k_{\text{ad}} u_{ll} \delta_{ik} + 2\mu \left(u_{ik} - \frac{1}{3} u_{ll} \delta_{ik} \right), \quad (3.56)$$

mit dem *adiabatischen Kompressionsmodul* k_{ad} . Das Torsionsmodul μ ist offenbar mit dem isothermen identisch.

3.3 Gleichgewichtsbedingungen

3.3.1 Isotroper Körper

Wir wollen Gleichgewichtsbedingungen für die Deformationen $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ in einem isotropen Körper erhalten. Im Gleichgewicht mit Schwerfeld \mathbf{g} gilt die Bedingung (3.19). Mit (3.50) wird andererseits

$$\partial_k \sigma_{ik} = \frac{E}{1 + \sigma} \partial_k u_{ik} + \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \partial_i u_{ll}, \quad (3.57)$$

und mit der linearen Näherung (3.8) für (u_{ik}) erhält man dann aus (3.19)

$$\frac{E}{2(1 + \sigma)} \partial_k \partial_k u_i + \underbrace{\left[\frac{E}{2(1 + \sigma)} + \frac{E\sigma}{(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)} \right]}_{\frac{E}{2(1 + \sigma)(1 - 2\sigma)}} \partial_i \partial_k u_k + \rho g_i = 0, \quad (3.58)$$

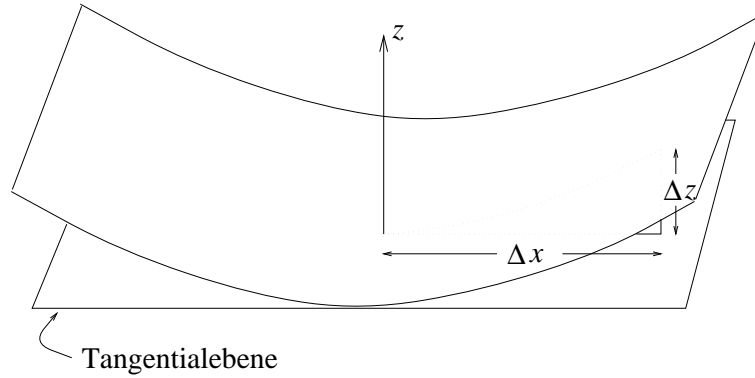


Abb. 3.4: Verbogene Platte

oder

$$\Delta \mathbf{u} + \frac{1}{1 - 2\sigma} \text{grad div } \mathbf{u} = -\rho \frac{2(1 + \sigma)}{E} \mathbf{g}. \tag{3.59}$$

Auf der rechten Seite der Gleichung steht eine *Volumenkraft*, d. h. eine Kraft, die im ganzen Volumen des Körpers wirkt. Normalerweise interessiert uns der Fall, bei dem Kräfte nur über die Oberfläche vermittelt werden. Dann ist $\mathbf{g} = 0$ und wir erhalten

$$(1 - 2\sigma)\Delta \mathbf{u} + \text{grad div } \mathbf{u} = 0. \tag{3.60}$$

Die Oberflächenkräfte gehen ein über die Randbedingungen (3.20).

Wir erhalten Eigenschaften von Deformationsfeldern $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ für beide Fälle, wenn wir auf (3.59) den Operator div anwenden. Da nämlich $\text{div } \mathbf{g} = 0$ und $\text{div grad} = \Delta$, folgt

$$[(1 - 2\sigma) + 1] \Delta \text{div } \mathbf{u} = 0 \implies \Delta \text{div } \mathbf{u} = 0. \tag{3.61}$$

Es ist somit $\text{div } \mathbf{u}$ eine *harmonische Funktion*. Hier sei nochmal darauf hingewiesen, dass $\text{div } \mathbf{u} = u_{ii}$ die relative Volumenänderung darstellt.

Wenden wir den Operator Δ auf (3.59) an, so erhalten wir wegen $\Delta \mathbf{g} = 0$

$$(1 - 2\sigma) \Delta \Delta \mathbf{u} + \text{grad } \underbrace{\Delta \text{div } \mathbf{u}}_{\stackrel{(3.61)}{=} 0} = 0 \implies \Delta \Delta \mathbf{u} = 0. \tag{3.62}$$

Man nennt (3.62) die *biharmonische Gleichung* und \mathbf{u} eine *biharmonische Funktion*.

3.3.2 Die Dünne Platte

Wir betrachten eine Platte, deren Stärke klein ist im Vergleich zu ihren anderen beiden Ausdehnungen. Außerdem soll die Verbiegung der Platte klein sein, d. h. $\Delta z \ll \Delta x, \Delta y$; siehe Abbildung 3.4.

Bei einer Verbiegung der Platte tritt an der konvexen Seite eine Dehnung, an der konkaven eine Kompression auf. Daher muß es im Platteninneren eine Fläche geben, auf der keine

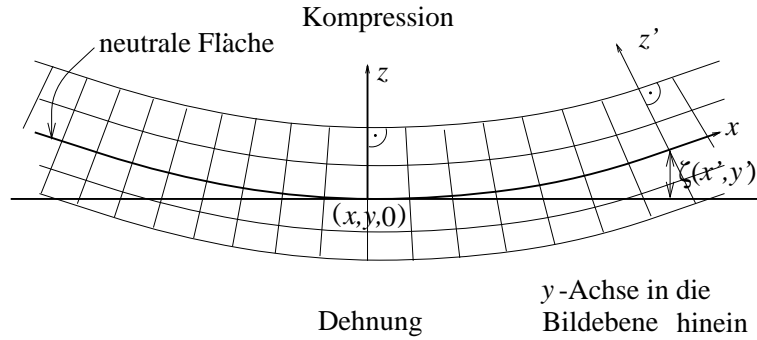


Abb. 3.5: Koordinaten einer verbogenen Platte

Spannungen auftreten. Man nennt sie die *neutrale Fläche*. Aus Symmetriegründen liegt sie äquidistant und mittig zwischen den beiden Oberflächen.

Wir benutzen nun die krummlinige Koordinaten x , y und z , die sich durch die Verbiegung der Platte aus kartesischen Koordinaten ergeben und setzen uns für den Moment auf feste x - und y -Werte; siehe Abbildung 3.5. Lokal haben wir tatsächlich ein kartesisches Koordinatensystem und können alle Größen so verstehen wie bisher in diesem Kapitel. Die neutrale Fläche liege bei $z = 0$. Sei $\zeta(x, y) := u_z|_{z=0}$ die z -Deformation der neutralen Fläche; siehe Abbildung 3.5. Die Deformationen in x - und y -Richtung auf dieser Fläche sind klein von zweiter Ordnung. Der entsprechende Verschiebungsvektor ist somit

$$\begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \zeta(x, y) \end{pmatrix}. \quad (3.63)$$

Eine Darstellung $\boldsymbol{x} = (x, y, \zeta(x, y))$ nennt sich Monge-Darstellung, nach Gaspard Monge (1746–1818), dem Gründer der französischen Schule der Differentialgeometrie. Olinde Rodrigues (1794–1851) und Jean-Baptiste Meusnier (1754–1793) waren seine Schüler, zu denen auch Ch. Dupin und E.L. Malus zählten. Seine Hauptarbeit ist die von 1795 an publizierte Abhandlung *Applications de l'Analyse à la Géométrie*; eine fünfte Auflage besorgte J. Liouville 1850 (sic), was wohl überzeugend seinen großen Einfluß zeigt. Auch Gauß zollte ihm in einer Rezension von 1813 beachtliches Lob: "Dem vorliegenden Werke müssen wir insbesondere das Lob einer grossen Klarheit, ... beilegen, und daher das Studium desselben als eine kräftige Geistesnahrung empfehlen."

Für das Verbiegen einer *dünnen* Platte benötigt man nur *kleine* externe Kräfte, im Vergleich zu den im Innern wegen Dehnung und Kompression auftretenden Spannungen. Es gelten daher näherungsweise die Randbedingungen

$$0 \approx P_i = \sigma_{ik} n_k \quad (3.64)$$

bei einem Normalenvektor $\boldsymbol{n} = \pm(0, 0, 1)$. Daraus folgt

$$\sigma_{xz} = \sigma_{yz} = \sigma_{zz} = 0 \quad (3.65)$$

an den beiden Oberflächen der Platte. Da die Platte aber dünn ist, gilt (3.65) näherungsweise auch im Platteninnern.

Gleichung (3.50) besagt:

$$\begin{aligned}\sigma_{xz} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{xz} \\ \sigma_{yz} &= \frac{E}{1+\sigma} u_{yz} \\ \sigma_{zz} &= \frac{E}{(1+\sigma)(1-2\sigma)} [(1-\sigma)u_{zz} + \sigma(u_{xx} + u_{yy})]\end{aligned}$$

Verwenden wir wieder (3.8) und setzen (3.65) ein, so erhalten wir daraus:

$$\partial_z u_x = -\partial_x u_z \quad (3.66)$$

$$\partial_z u_y = -\partial_y u_z \quad (3.67)$$

$$\partial_z u_z = -\frac{\sigma}{1-\sigma} (\partial_x u_x + \partial_y u_y) \quad (3.68)$$

Nun benutzen wir abermals die Dünnheit der Platte zusammen mit (3.63) sowie $u_x = u_y = 0$ für $z = 0$ und integrieren die Gleichungen (3.66) und (3.67) zu

$$u_x = -z \partial_x \zeta \quad (3.69)$$

$$u_y = -z \partial_y \zeta. \quad (3.70)$$

Für den Verzerrungstensor erhalten wir daraus, unter Bezugnahme von (3.8) und (3.68):

$$\begin{aligned}u_{xx} &= -z \partial_x^2 \zeta \\ u_{yy} &= -z \partial_y^2 \zeta \\ u_{xy} &= -z \partial_x \partial_y \zeta \\ u_{zz} &= \frac{z\sigma}{1-\sigma} (\partial_x^2 \zeta + \partial_y^2 \zeta) \\ u_{xz} &= 0 \\ u_{yz} &= 0\end{aligned} \quad (3.71)$$

Die beiden letzten Gleichungen folgen direkt aus (3.66) bzw. (3.67).

Mit Hilfe von (3.50) bekommen wir nun die Freie-Energie-Dichte

$$F = z^2 \frac{E}{1+\sigma} \left\{ \frac{1}{2(1-\sigma)} (\partial_x^2 \zeta + \partial_y^2 \zeta)^2 + [(\partial_x \partial_y \zeta)^2 - \partial_x^2 \zeta \partial_y^2 \zeta] \right\}. \quad (3.72)$$

Die integrierte freie Energie der Biegung der Platte ergibt sich aus

$$\mathcal{F}_b := \int_{\text{Platte}} dV F = \int_{-\frac{h}{2}}^{+\frac{h}{2}} dz \iint dxdy \underbrace{\sqrt{\det g}}_{=:W} F, \quad (3.73)$$

wenn wir die Dicke der Platte mit h bezeichnen und $dO = W dx dy$ mit $W := (\det g)^{1/2}$ verwenden; vgl. (2.135). Dabei ist g der Metriktensor unserer krummlinigen Koordinaten.

Wir entwickeln W in der Monge-Darstellung um den undeformierten Zustand [kartesische Koordinaten (x, y, z)] nach Potenzen von ζ und seinen Ableitungen und finden:

$$W = 1 + \frac{1}{2}(\partial_x \zeta)^2 + \frac{1}{2}(\partial_y \zeta)^2 + \dots ,$$

wie wir in (3.78) gleich sehen werden. In der Tat treten Terme mit ζ und $\partial_{x/y} \zeta$ nicht auf, da diese nichts mit einer echten Verbiegung der Platte – und des kartesischen Koordinatensystems – zu tun haben. Da F aber schon 2. Ordnung in den $\partial_{x/y}^2 \zeta$ ist und die Verbiegung nach wie vor klein, können wir $W = 1$ setzen. *Wir dürfen also lokal (x, y, z) als kartesische Koordinaten auffassen.* Die freie Energie lautet damit

$$\mathcal{F}_b = \frac{Eh^3}{24(1-\sigma^2)} \iint dx dy \{ (\Delta \zeta)^2 + 2(1-\sigma) [(\partial_x \partial_y \zeta)^2 - \partial_x^2 \zeta \partial_y^2 \zeta] \} . \quad (3.74)$$

3.4 Freie Energie und Differentialgeometrie

Das Ziel dieses Kapitels ist es, die oben hergeleitete freie Energie der dünnen Platte als Funktion ihrer *intrinsic* geometrischen Eigenschaften, also von gut meßbaren Größen, zu schreiben. Dazu sei im Folgenden die Platte als unendlich dünn, d. h. als 2-dimensionale Hyperfläche, betrachtet. Dennoch behalten wir den dicke-abhängigen Vorfaktor in (3.74) bei³. Wir verwenden die Ergebnisse des Abschnitts 2.9.

Die Mannigfaltigkeit der neutralen Fläche ist die Menge der Punkte

$$\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ \zeta(x, y) \end{pmatrix} \quad (3.75)$$

in der Monge-Darstellung. Es bietet sich die Parametrisierung in (x, y) an. Die Tangential-Basisvektoren und ihr Vektorprodukt sind

$$\partial_1 \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \partial_x \zeta \end{pmatrix}, \quad \partial_2 \mathbf{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \partial_y \zeta \end{pmatrix}, \quad \partial_1 \mathbf{x} \times \partial_2 \mathbf{x} = \begin{pmatrix} -\partial_x \zeta \\ -\partial_y \zeta \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3.76)$$

Wir kürzen ab: $p := \partial_x \zeta$, $q := \partial_y \zeta$. Die Metrik der Fläche ist

$$g = (g_{\mu\nu}) = (\partial_\mu \mathbf{x} \partial_\nu \mathbf{x}) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 + p^2 & pq \\ pq & 1 + q^2 \end{pmatrix}. \quad (3.77)$$

Wir benötigen $W^2 = \|\partial_1 \mathbf{x} \times \partial_2 \mathbf{x}\|^2$ aus (3.76) oder indirekt über

$$W^2 := \det g = EG - F^2 = 1 + (p^2 + q^2) \quad \xrightarrow{p^2, q^2 \ll 1} \quad W \approx 1 + \frac{1}{2}(p^2 + q^2), \quad (3.78)$$

³Der Limes $h \rightarrow 0$ macht hier offenbar keinen Sinn.

um mit Hilfe von (2.88) die 2. Grundform zu berechnen:

$$H = (h_{\mu\nu}) = (W^{-1} \det(\partial_1 \mathbf{x}, \partial_2 \mathbf{x}, \partial_\mu \partial_\nu \mathbf{x})) = \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} = W^{-1} \begin{pmatrix} \partial_x^2 \zeta & \partial_x \partial_y \zeta \\ \partial_x \partial_y \zeta & \partial_y^2 \zeta \end{pmatrix}. \quad (3.79)$$

Schließlich erhalten wir das Gaußsche Krümmungsmaß \mathbb{K} aus (2.94):

$$\mathbb{K} = \kappa_1 \kappa_2 = W^{-2} (LN - M^2) = \underbrace{W^{-4}}_{\approx 1} [\partial_x^2 \zeta \partial_y^2 \zeta - (\partial_x \partial_y \zeta)^2], \quad (3.80)$$

sowie die mittlere Krümmung \mathbb{H} aus (2.96)⁴:

$$\begin{aligned} \mathbb{H} &= \kappa_1 + \kappa_2 = W^{-2} (EN - 2FM + GL) \\ &= \underbrace{W^{-3}}_{\approx 1} [\partial_x^2 \zeta + \partial_y^2 \zeta + \underbrace{q^2 \partial_x^2 \zeta - 2pq \partial_x \partial_y \zeta + p^2 \partial_y^2 \zeta}_{\mathcal{O}((\partial_{x/y} \zeta)^2 \partial_{x/y}^2 \zeta) \Rightarrow W:=1}] \approx \Delta \zeta. \end{aligned} \quad (3.81)$$

Durch Vergleich mit (3.74) sehen wir, dass sich die Freie-Energie-Flächendichte der Platte schreiben läßt als

$$\mathbb{F} := \frac{1}{2} k_c \mathbb{H}^2 + \frac{1}{2} k_g \mathbb{K} \quad (k_c > 0, k_g < 0), \quad (3.82)$$

bzw. die gesamte freie Energie als

$$\mathcal{F}_b = \iint df \mathbb{F}. \quad (3.83)$$

Dabei kann die Oberfläche offen oder geschlossen sein; bei offener Oberfläche gibt es Randterme. Die Konstanten [laut (3.47) ist $0 \leq \sigma < 1/2$]

$$k_c = Eh^3 [12(1 - \sigma^2)]^{-1} > 0 \quad \text{und} \quad k_g = -Eh^3 [6(1 + \sigma)]^{-1} < 0 \quad (3.84)$$

heißen *Biegesteifigkeit* bzw. *Modul der Gaußschen Krümmung* – und hängen selbstverständlich mit σ und E zusammen.

Das Resultat (3.82) ist vernünftig für isotrope elastische Platten. Für unsere Membran bedeutet dies, dass die beiden Schichten chemisch identisch sind. Sind die beiden Schichten chemisch verschieden (z. B. Actinfilamente an der Innenseite von roten Blutkörperchen), so muß man eine *spontane Krümmung* κ_0 berücksichtigen:

$$\mathbb{F} = \frac{1}{2} k_c (\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_0)^2 + \frac{1}{2} k_g \kappa_1 \kappa_2. \quad (3.85)$$

Bis jetzt haben wir als einzige Deformation eine leichte Verbiegung betrachtet. Es könnte aber noch Deformationen geben, die zu lateralen Spannungen führen, indem sie die Oberfläche A vergrößern. Wir berücksichtigen diesen Beitrag einfach durch die *Oberflächenspannung* Σ als Lagrange-Parameter⁵ und schreiben

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_b + \Sigma A = \frac{1}{2} k_c \iint df (\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_0)^2 + \frac{1}{2} k_g \iint df \kappa_1 \kappa_2 + \Sigma A. \quad (3.86)$$

⁴Ausgenommen das letzte \approx Zeichen in (3.81) sind die Formeln (3.80) und (3.81) exakt.

⁵Zum ‘Lagrange-Parameter’ oder ‘Lagrange multipler’ im Kontext der Variationsrechnung sei auf Kap. 11 des schönen Buches *Mathematics applied to continuum mechanics* von L.A. Segel (Macmillan, New York, 1977) verwiesen.

Das zweite Integral im rechten Glied wird nach dem Satz von Gauß-Bonnet zu $2\pi k_g(1-p)$, wobei p die Zahl der Henkel ist. Der Ausdruck (3.86) enthält nur geometrische Größen, die nur von der Membranoberfläche bestimmt werden, und ist damit unabhängig von der verwendeten Parametrisierung. Translations- sowie Rotationsinvarianz sind evident.

Umgekehrt kann man, wie Helfrich (1973), ansetzen, dass unser Funktional \mathcal{F} nur von der Vesikel-Form bestimmt wird (Translations- sowie Rotationsinvarianz folgen) und linear oder quadratisch in den Hauptkrümmungen ist. Da keine der Hauptachsen ausgezeichnet sein sollte, bleibt für die Dichte \mathbb{F} nur eine Linearkombination von \mathbb{H} , \mathbb{H}^2 und \mathbb{K} übrig. Man kann den linearen Term mittels einer Spontankrümmung κ_0 verschwinden lassen, so dass sich sofort (3.85) ergibt.

Zur Bestimmung der Form von Vesikeln muß man die freie Energie unter passenden Randbedingungen *minimieren*. Das Minimum in den Krümmungen gibt einem dann die Information über die Form. Wir haben es also mit einem Variationsproblem zu tun.

Allgemein kann man aus (3.86) ablesen, dass die Bildung von Löchern die Energie erhöht, da

- in der Umgebung von Löchern die Krümmungen besonders groß sind, was den ersten Term in (3.86) vergrößert, und
- der Beitrag $2\pi k_g(1-p)$ zur freien Energie wegen $k_g < 0$ mit steigender Löcherzahl wächst.

Als erste kleine Anwendung wollen wir die freie Energie einer Sphäre (Radius R) mit der einer ebenen, runden Platte gleicher Fläche $A = 4\pi R^2$ (Radius $2R$) vergleichen. Der Term für die Oberflächenspannung ist irgendeine uninteressante Konstante. Für die Sphäre gilt ohne diese Konstante:

$$\mathcal{F}(\text{Sphäre}) = \frac{1}{2}k_c \left(\frac{2}{R} - \kappa_0 \right)^2 A + 2\pi k_g. \quad (3.87)$$

Bei der Platte müssen die freien (hydrophoben) Ränder der Fläche berücksichtigt werden, da deren Umfang variieren kann. Sei ρ also die *Randspannung*, dann gilt für die Platte:

$$\mathcal{F}(\text{Platte}) = \frac{1}{2}k_c \kappa_0^2 A + 4\pi R\rho. \quad (3.88)$$

Man sieht: Für hinreichend großes R ist $\mathcal{F}(\text{Sphäre}) < \mathcal{F}(\text{Platte})$ und damit die Sphäre stabiler als die Platte. Dies ist ein Vesikel-freundliches Ergebnis.

3.5 Das Variationsproblem

Wir müssen die freie Energie bei *gegebener Oberfläche* A und bei *gegebenem Volumen* V minimieren. Ersteres, da wir wissen, dass die Membran sehr zäh ist, d.h. nicht nachgibt bei einer

Belastung entlang der Oberfläche, und weil wir annehmen, dass auf für ein Experiment relevanten Zeitskalen keine Moleküle in die Lipidschichten eingebaut werden oder sie verlassen; letzteres beruht auf der Annahme, dass auf ebensolchen Zeitskalen kein Material aus dem Vesikelinneren mit der Umgebung ausgetauscht wird. Dazu benötigen wir zwei Lagrange-Parameter, die Oberflächenspannung Σ und den Druck P . Es gibt (mindestens) zwei Arten unser Variationsproblem anzugehen. Sie unterscheiden sich in der Art der Darstellung der „spontanen“ Krümmung.

3.5.1 Das Helfrich-Modell

Das ursprüngliche Modell wurde 1973 von Helfrich vorgeschlagen und später mit Deuling ausgearbeitet.

Wir minimieren

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_b + \Sigma A - PV, \quad (3.89)$$

wobei wir für \mathcal{F}_b den Ausdruck aus (3.86) nehmen, also mit expliziter spontaner Krümmung κ_0 , allerdings ohne den Term für die Gaußsche Krümmung, da wir die Topologie der Fläche als konstant annehmen, d. h. dass keine Löcher entstehen sollen; das Geschlecht p ist konstant und zwar $p = 0$. Die Größen Σ und P sind Lagrange-Parameter, die garantieren, dass Oberfläche A und Volumen V konstant bleiben.

Literatur:

- W. HELFRICH
Z. Naturforsch. **28c** (1973) 693–703, eine klassische Arbeit.
- W. HELFRICH & H.J. DEULING, J. Phys. (Paris) Colloq. **36** C1 (1975) 327–329, Biophys. J. **16** (1976) 861–868, J. Phys. (Paris) **37** (1976) 1335–1345

3.5.2 Das Bilayer-Coupling-Modell

Man kann die spontane Krümmung der Membran auch anders einbringen. Wenn wir berücksichtigen, dass wir es mit einer *Doppelschicht* zu tun haben, und wenn wir annehmen, dass die beiden Monoschichten auf den relevanten Zeitskalen keine Moleküle austauschen, dann erreichen wir die Spontankrümmung durch eine feste Flächendifferenz zwischen den beiden Schichten. Sei D ihr Abstand von einander. Wir beschreiben die beiden Lipidschichten als äquidistante Hyperflächen:

$$\hat{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{x} - D\boldsymbol{n}. \quad (3.90)$$

Beide seien mit den Parametern q^1 und q^2 parametrisiert. Die Flächendifferenz ist

$$\Delta A := A_{\text{außen}} - A_{\text{innen}} = \iint dq^1 dq^2 \left(\sqrt{\det \hat{g}} - \sqrt{\det g} \right), \quad (3.91)$$

mit [siehe (2.76)]

$$\hat{g}_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + 2Dh_{\mu\nu} + D^2k_{\mu\nu}. \quad (3.92)$$

Es ist

$$\begin{aligned} \det \hat{g} &= \det (g + 2DH + D^2K) = (\det g) \det (\mathbb{1} + 2Dg^{-1}H + D^2g^{-1}K) \\ &\approx (\det g) (1 + 2D \underbrace{\text{tr } g^{-1}H}_{\mathbb{H}}). \end{aligned} \quad (3.93)$$

Die hier verwendete Näherung ist 1. Ordnung in $D\kappa = D/R \ll 1$; vgl. (2.93) und (2.97). In gleicher Näherung wird

$$\sqrt{\det \hat{g}} = \sqrt{\det g} (1 + 2D\mathbb{H})^{1/2} \approx \sqrt{\det g} (1 + D\mathbb{H}), \quad (3.94)$$

und damit

$$\Delta A = \int \int \underbrace{dq^1 dq^2}_{df} \sqrt{\det g} D(\kappa_1 + \kappa_2) = D \int \int df (\kappa_1 + \kappa_2) = DM. \quad (3.95)$$

Die Größe M ist die *integrierte mittlere Krümmung* und experimentell bestimmbar. Sie entspricht der Spontankrümmung im Helfrich-Modell.

Im *Bilayer-Coupling-Modell* wird demnach die Größe

$$\mathcal{G}_b = \frac{1}{2}k_c \int \int df (\kappa_1 + \kappa_2)^2 \quad (3.96)$$

minimiert bei konstanten A , V und M .

Wir können die beiden Ansätze vergleichen:

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{1}{2}k_c \int \int df (\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_0)^2 + \Sigma A - PV \\ &= \frac{1}{2}k_c \int \int df (\kappa_1 + \kappa_2)^2 - k_c \kappa_0 \underbrace{\int \int df (\kappa_1 + \kappa_2)}_M + \frac{1}{2}k_c \kappa_0^2 A + \Sigma A + PV \end{aligned} \quad (3.97)$$

$$\mathcal{G} = \frac{1}{2}k_c \int \int df (\kappa_1 + \kappa_2)^2 + \Sigma' A - PV + QM \quad (3.98)$$

Auch hier sind Σ' , P und Q wieder Lagrange-Parameter. Man sieht, dass $\mathcal{G} = \mathcal{F}$, falls $\Sigma' = \Sigma + \frac{1}{2}k_c \kappa_0^2$ und $Q = -k_c \kappa_0$. Die beiden Modelle sind also äquivalent.

Literatur:

- E. EVANS, Biophys. J. **14** (1974) 923–931
- S. SVETINA & B. ŽEKŠ, Eur. Biophys. J. **17** (1989) 101–111; eine Ausarbeitung der Evanschen Idee.

3.5.3 Skaleninvarianz

Es gibt eine interessante Invarianzeigenschaft der Energie-Funktionale \mathcal{F} und \mathcal{G} . Unter der Skalentransformation $\mathbf{x} \mapsto \lambda \mathbf{x}$ ändern sich

$$\begin{aligned}\kappa_i &\mapsto \frac{\kappa_i}{\lambda}, \\ \kappa_0 &\mapsto \frac{\kappa_0}{\lambda}, \\ M &\mapsto \lambda M, \\ df &\mapsto \lambda^2 df, \\ A &\mapsto \lambda^2 A, \\ V &\mapsto \lambda^3 V.\end{aligned}$$

Demnach sind die Energiefunktionale \mathcal{F} und \mathcal{G} invariant unter dieser Transformation, wenn

$$\begin{aligned}Q &\mapsto \frac{Q}{\lambda}, \\ \Sigma &\mapsto \frac{\Sigma}{\lambda^2}, \\ P &\mapsto \frac{P}{\lambda^3}.\end{aligned}$$

Ist also $\mathbf{x}(q^1, q^2)$ eine Lösung des Variationsproblems für vorgegebenes (A, V, M) , so ist $\lambda \mathbf{x}(q^1, q^2)$ ebenfalls eine Lösung, und zwar für $(\lambda^2 A, \lambda^3 V, \lambda M)$. Es genügen deshalb zur Charakterisierung der Lösungen zwei dimensionslose Parameter, z. B., mit $R_0 := \sqrt{\frac{A}{4\pi}}$,

$$v := \frac{V}{\frac{4\pi}{3}R_0^3}, \quad \Delta a := \frac{M}{4\pi R_0}. \quad (3.99)$$

Diese Parameter sind so gewählt, dass für eine Kugel $v = \Delta a = 1$.

3.5.4 Die Parametrisierung nach Helfrich

Wir behandeln hier nur *axialsymmetrische* Vesikel. Das vereinfacht das Variationsproblem gewaltig, da nur eine ebene Kurve, die *Kontur* der Fläche, zu bestimmen ist; siehe Abbildung 3.6.

Es stellt sich nun die Frage nach einer geeigneten Parametrisierung. Zunächst würde man vielleicht Kugelkoordinaten ausprobieren (vgl. Abbildung 2.11), d. h. die Kontur durch die Funktion $r(\theta)$ beschreiben. Die Hauptkrümmungen liegen für axialsymmetrische Flächen in Richtung der Kontur und azimuthal, was man sich etwa anhand der Gültigkeit der Gleichung (2.32) nach Rodrigues für solche Kurven mit $\tau = 0$ klar macht. Die Hauptkrümmung in Konturrichtung ist in diesen Koordinaten (wieso?)

$$\kappa = \frac{\left| r^2 + 2 \left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 - r \frac{d^2 r}{d\theta^2} \right|}{\left[\left(\frac{dr}{d\theta} \right)^2 + r^2 \right]^{\frac{3}{2}}}. \quad (3.100)$$

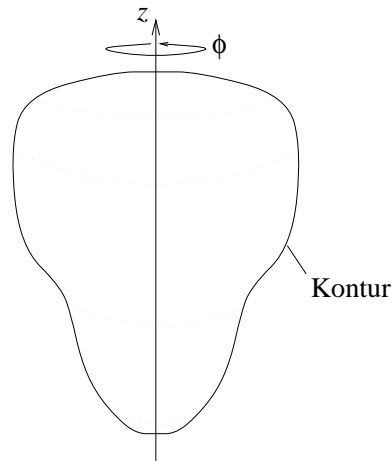


Abb. 3.6: Axialsymmetrisches Vesikel

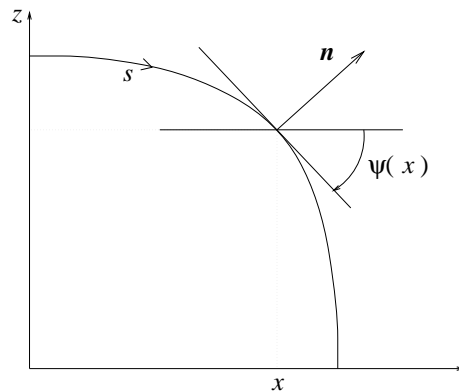


Abb. 3.7: Beschreibung der Kontur nach Helfrich: x ist eine Koordinate und s ist die Bogenlänge. Man beachte die Vorzeichen-Konvention für ψ . Im gezeigten Fall ist $\psi(x) > 0$. Die Bogenlänge s ersetzt bei Peterson x ; vgl. §3.5.6.

Die Euler-Lagrange-Gleichungen wären also Differentialgleichungen 4. Ordnung für die Kontur! Um das zu vermeiden benötigen wir andere Parameter.

Helfrich⁶ wählte $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\phi, x)$, wobei ϕ wieder der Azimutalwinkel ist und x die kartesische x -Koordinate (orthogonale Koordinaten). Zur Beschreibung der Kontur benutzt er die Funktion $\psi(x)$ des Winkels zwischen x -Achse und Kontur-Tangente bei x ; siehe Abbildung 3.7. Wenn man bei festem x die Koordinate ϕ variiert, durchläuft man einen Kreis mit Radius x in der Ebene senkrecht zur z -Achse, also in Richtung der azimutalen Hauptkrümmung κ_1 . Nach Meusniers Theorem 2.2 gilt für diese Krümmung κ_1 und die Krümmung der Kurve $\tilde{\kappa}$

$$\kappa_1 = \tilde{\kappa} \cos \theta, \quad (3.101)$$

⁶Obwohl die Parametrisierung nach Peterson in §3.5.6 eleganter ist, werden wir uns erst mit der Helfrichschen Idee befassen, weil sie in der Literatur viel verwendet worden ist bzw. wird.

mit $\theta = \angle(\mathbf{n}, d_s^2 \mathbf{x})$. Ferner gilt $\tilde{\kappa} = 1/x$ sowie $\cos \theta = \sin \psi$, so dass aus (3.101) wird:

$$\kappa_1(x) = \frac{\sin \psi(x)}{x}. \quad (3.102)$$

Variiert man x bei festem ϕ , so durchläuft man die Konturlinie, bewegt sich somit in Richtung der anderen Hauptkrümmung κ_2 . Geometrisch ist evident, dass für diese Kurve $\angle(\mathbf{n}, d_s^2 \mathbf{x}) = 0$ ist. Es gilt also nach Theorem 2.2:

$$\kappa_2 = \|d_s^2 \mathbf{x}\| = \left\| \frac{d(d_s \mathbf{x})}{d\psi} \frac{d\psi}{dx} \frac{dx}{ds} \right\| = \frac{d\psi}{dx} \underbrace{\frac{dx}{ds}}_{\cos \psi} \left\| \frac{d(d_s \mathbf{x})}{d\psi} \right\|. \quad (3.103)$$

Es ist aber

$$d_s \mathbf{x} = \begin{pmatrix} \cos \psi \\ -\sin \psi \end{pmatrix}, \quad (3.104)$$

und daher

$$\left\| \frac{d(d_s \mathbf{x})}{d\psi} \right\| = 1. \quad (3.105)$$

Es folgt nun aus (3.103)

$$\kappa_2(x) = \frac{d\psi}{dx}(x) \cos \psi(x). \quad (3.106)$$

Die Hauptkrümmungen in dieser Form setzen wir in \mathcal{F}_b ein und führen die Azimutal-Integration aus:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_b &= \frac{1}{2} k_c \iint df (\kappa_1 + \kappa_2 - \kappa_0)^2 = \iint x d\phi ds \dots = \iint x d\phi \left| \frac{ds}{dx} \right| dx \dots \\ &= \int_0^{x_m} dx \frac{2\pi x}{|\cos \psi|} \dots \end{aligned} \quad (3.107)$$

Unser Variationsproblem besteht also darin, eine Funktion $\psi(x)$ und einen maximalen x -Wert x_m zu finden, so daß

$$\mathcal{F} = \int_0^{x_m} dx \mathcal{L} \left(x, \psi(x), \frac{d\psi}{dx} \right) \quad (3.108)$$

mit

$$\mathcal{L} \left(x, \psi(x), \frac{d\psi}{dx} \right) := k_c \frac{\pi x}{|\cos \psi|} \left(\frac{\sin \psi}{x} + \cos \psi \frac{d\psi}{dx} - \kappa_0 \right)^2 + \Sigma \frac{2\pi x}{|\cos \psi|} + P\pi x^2 \tan \psi \quad (3.109)$$

minimal ist unter den Nebenbedingungen

$$A = \int_0^{x_m} dx \frac{2\pi x}{|\cos \psi|}, \quad V = \int_0^{x_m} dx x^2 \pi \tan \psi. \quad (3.110)$$

Die geometrischen Überlegungen, die auf das Flächenelement bzw. die Volumenscheibe führen sind in Abbildung 3.8 zusammengefaßt. Tatsächlich gibt es von der Kontur $\psi(x)$ zwei Zweige $\psi_{\text{oben}}(x)$ und $\psi_{\text{unten}}(x)$ ober- bzw. unterhalb von $z(x_m)$; siehe Abbildung 3.9.

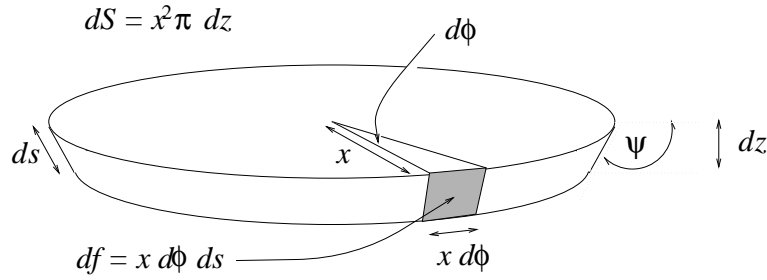
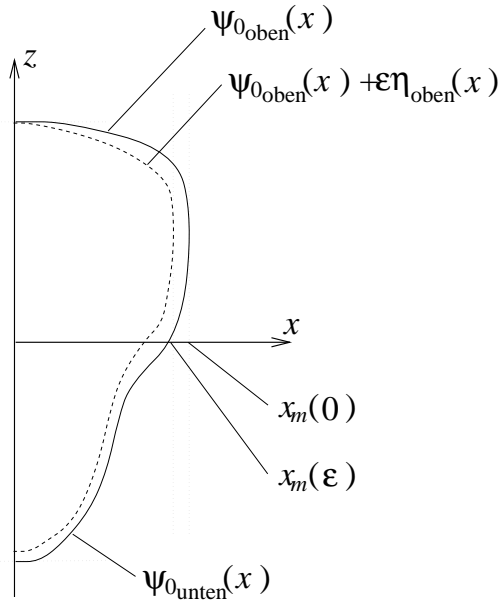
Abb. 3.8: Flächenelement df und Volumenscheibe dS 

Abb. 3.9: Variation der Kontur

Wir schreiben für beide stellvertretend nur $\psi(x)$. Das Integral in (3.108) ist so gemeint, dass es über die beiden Zweige summiert.

Wenn wir das Variationsproblem gelöst haben, ergibt sich $z(x)$ aus

$$\frac{dz}{dx} = \pm \tan \psi(x) \implies z(x) = z(0) \pm \int_0^x dy \tan \psi(y). \quad (3.111)$$

Sei $\psi_0(x)$ so ein Minimum, $\epsilon \ll 1$ und $\eta(x)$ eine Funktion auf $[0, x_m(\epsilon)]$. Es bedeute $f' := \frac{df}{dx}$. Wir betrachten die Variation (vgl. Abbildung 3.9)

$$\delta \mathcal{F} = \int_0^{x_m(\epsilon)} dx \mathcal{L}(x, \psi_0 + \epsilon \eta, \psi_0' + \epsilon \eta') - \int_0^{x_m(0)} dx \mathcal{L}(x, \psi_0, \psi_0'). \quad (3.112)$$

Die Kontur des Vesikels soll oben und unten glatt sein, d. h. keine Spitzen haben (das wäre energetisch sehr ungünstig). Daher muß $\psi_{\text{oben}}(0) = 0$ und $\psi_{\text{unten}}(0) = \pi$ sein. Um das bei Variation zu gewährleisten muß $\eta_{\text{oben}}(0) = \eta_{\text{unten}}(0) = 0$ gelten. Wir entwickeln (3.112) bis

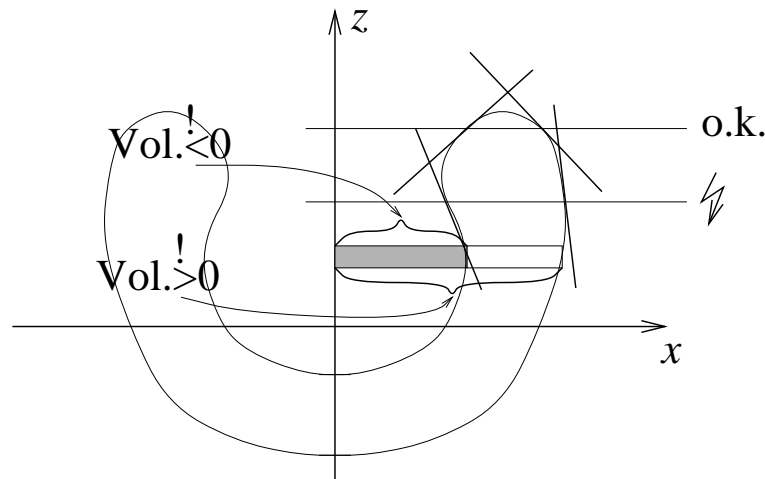


Abb. 3.10: Volumenberechnung mit den Volumenscheiben – ein Problem in der Helfrich-Darstellung, wenn das Volumen nicht negativ genommen wird, da $0 < \psi < \pi/2 \bmod \pi$; auf diese Weise werden “Innenvolumina” zweimal berechnet, obwohl sie hier gar nicht in Erscheinung treten sollten.

zur 1. Ordnung in ϵ :

$$\begin{aligned}
 \delta \mathcal{F} &\approx \int_0^{x_m(\epsilon)} dx \mathcal{L}(x, \psi_0, \psi'_0) - \int_0^{x_m(0)} dx \mathcal{L}(x, \psi_0, \psi'_0) \\
 &\quad + \epsilon \int_0^{x_m(\epsilon)} dx [\eta \partial_\psi \mathcal{L}(x, \psi_0, \psi'_0) + \eta' \partial_{\psi'} \mathcal{L}(x, \psi_0, \psi'_0)] \\
 &\approx 2\epsilon \partial_\epsilon x_m(0) \mathcal{L}(x_m(0), \psi_0(x_m(0)), \psi'_0(x_m(0))) \\
 &\quad + \epsilon \int_0^{x_m(\epsilon)} dx \eta \left[\partial_\psi \mathcal{L} - \frac{d}{dx} \partial_{\psi'} \mathcal{L} \right] + \underbrace{\epsilon \eta \partial_{\psi'} \mathcal{L} \Big|_0^{x_m(\epsilon)}}_{2\epsilon \eta(x_m(\epsilon)) \partial_{\psi'} \mathcal{L}}
 \end{aligned} \tag{3.113}$$

Der letzte und vorletzte Term gehen aus partieller Integration hervor. Man beachte, dass auch hier die Integrale und das $\Big|_0^{x_m(\epsilon)}$ beide Zweige der Kontur addieren. Es soll jetzt freilich gelten:

$$\delta \mathcal{F} \stackrel{!}{=} 0. \tag{3.114}$$

An diesem Ansatz ist Folgendes problematisch:

- Die Parametrisierung ist wegen der induzierten Zweiwertigkeit von $\psi(x)$ und $z(x)$ nicht optimal. Besser wäre gewesen: $\psi(z)$ und $x(z)$.
- Es treten Singularitäten auf (z. B. $\tan \frac{\pi}{2}$) wegen vertikaler Kontur-Tangenten. Diese sind aber nur scheinbar, da die Krümmungen stets endlich sind. Sie müssen also kompensiert werden.

- Das Volumenintegral in (3.110) ist ein wenig trickreich und liefert nicht immer das richtige Gesamtvolumen. Ein Beispiel, in dem es falsch wird, ist in Abbildung 3.10 gegeben.
- Es treten Randterme auf. Spezifisch tritt der erste Term in (3.113) auf wegen dem *freien Rand* $x_m(\epsilon)$, der letzte Term weil η am Rand $x_m(\epsilon)$ nicht auf 0 fixiert werden kann.

Das letzte der Probleme wird von Helfrich bzw. Helfrich & Deuling nicht angesprochen. Sie betrachten nur spezielle Variationen mit fixen x_m und $\eta(x_m)$, bei denen die Randterme nicht auftreten. Auf diese Weise erhält man die gewöhnliche Euler-Lagrange-Gleichung als *notwendige Bedingung* für ψ_0 :

$$\partial_\psi \mathcal{L} - \frac{d}{dx} \partial_{\psi'} \mathcal{L} = 0. \quad (3.115)$$

3.5.5 Variationsprobleme mit freien Rändern

Literatur:

- R. COURANT & D. HILBERT, *Methoden der mathematischen Physik I*, Kap. IV, §11.8
- V.I. SMIRNOV, *Lehrgang der höheren Mathematik*, Band IV, §76

Wir betrachten das Problem ein wenig allgemeiner. Zu minimieren sei

$$\mathcal{F} = \int_{x_0(\epsilon)}^{x_1(\epsilon)} dx \mathcal{L}(x, \psi(x, \epsilon), \psi'(x, \epsilon)). \quad (3.116)$$

Mit den Definitionen

$$\begin{aligned} \psi_0(x) &:= \psi(x, 0) \\ \delta x_i &:= \left. \partial_\epsilon x_i(\epsilon) \right|_{\epsilon=0} \epsilon \\ \delta \psi &:= \left. \partial_\epsilon \psi(x, \epsilon) \right|_{\epsilon=0} \epsilon \\ \delta \psi' &:= \frac{d}{dx} \delta \psi \end{aligned}$$

wird in 1. Ordnung von ϵ

$$\delta \mathcal{F} = \mathcal{L}(x, \psi_0, \psi'_0) \delta x \Big|_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} dx (\partial_\psi \mathcal{L} \delta \psi + \underbrace{\partial_{\psi'} \mathcal{L} \delta \psi'}_{=: Z}). \quad (3.117)$$

Wie üblich wird partiell integriert:

$$\int_{x_0}^{x_1} dx Z = \partial_{\psi'} \mathcal{L}(\delta \psi) \Big|_{x_0}^{x_1} - \int_{x_0}^{x_1} dx \delta \psi \frac{d}{dx} \partial_{\psi'} \mathcal{L}. \quad (3.118)$$

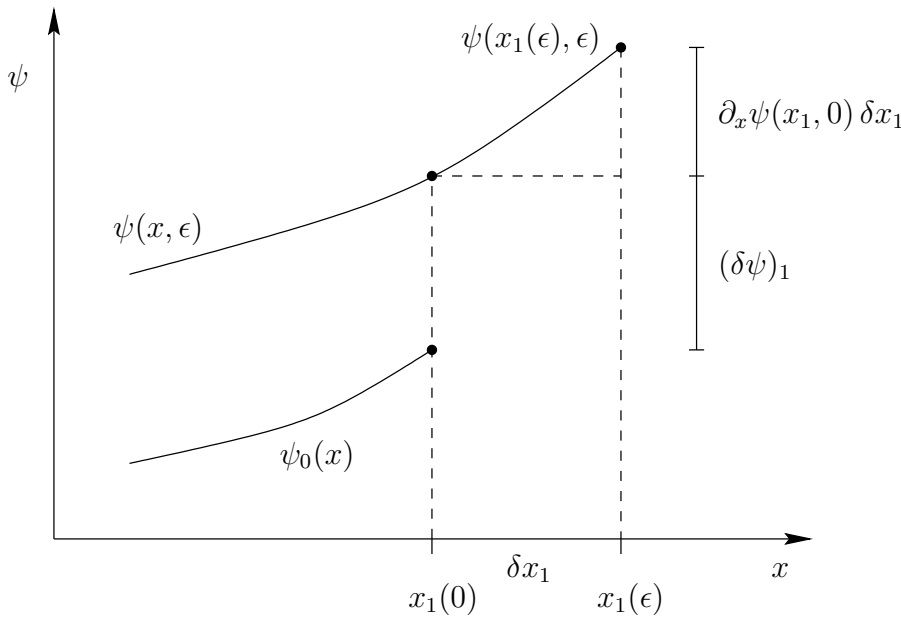


Abb. 3.11: Beim Variationsproblem mit freien Rändern liefert der freie Rand im Bild zwei Beiträge: (i) $(\delta\psi)_1$, da die Variations-Lösung sich bei festem Rand $x_1(0)$ von ψ_0 zu $\psi(x, \epsilon)$ um $(\delta\psi)_1$ wie in (3.119) angegeben ändert, sowie (ii) $\partial_x \psi(x_1, 0) \delta x_1$, da der Rand sich um δx_1 verschiebt.

Dabei sollte man sich klar machen, dass

$$(\delta\psi)_i = \left. \partial_\epsilon \psi(x_i(0), \epsilon) \right|_{\epsilon=0} \epsilon, \tag{3.119}$$

also nur die Variation von ψ durch ϵ für festen Randpunkt $x_i(0)$ darstellt. Die totale Variation in ϵ ist nach der Kettenregel

$$\delta\psi_i = \left. \frac{d}{dx} \psi(x_i(\epsilon), \epsilon) \right|_{\epsilon=0} \epsilon = \underbrace{\partial_{x_i} \psi \partial_\epsilon x_i}_{\delta x_i} \Big|_{\epsilon=0} \epsilon + \left. \partial_\epsilon \psi \right|_{\epsilon=0} \epsilon = \psi'(x_i) \delta x_i + (\delta\psi)_i \tag{3.120}$$

und enthält noch einen Term, der die Änderung des jeweiligen Randpunktes berücksichtigt. Durch Einsetzen von (3.118) und (3.120) in (3.117) erhalten wir

$$\delta\mathcal{F} = \left[\left(\underbrace{\mathcal{L} - \psi' \partial_\psi \mathcal{L}}_{=: -\mathcal{H}} \right) \delta x + \partial_{\psi'} \mathcal{L} \delta\psi \right]_{x_0}^{x_1} + \int_{x_0}^{x_1} dx \delta\psi \left[\partial_\psi \mathcal{L} - \frac{d}{dx} \partial_{\psi'} \mathcal{L} \right] \tag{3.121}$$

Hier tritt die Hamiltonfunktion \mathcal{H} auf. Aus dem letzten Integral ergibt sich wieder die Euler-Lagrange-Gleichung.

Betrachtet man nur Variationen mit festen Rändern $x_i(\epsilon) = x_i(0)$, die auch noch auf diesen verschwinden ($\psi(x_i, \epsilon) = \psi(x_i, 0)$), so ergibt sich die Euler-Lagrange-Gleichung als *notwendige Bedingung* für das Minimum. Wenn man diese erfüllt hat, verschwindet der letzte Term in (3.121). Durch Berücksichtigung allgemeiner Variationen erhält man aus dem ersten Term i. A. eine weitere Bedingung.

In unserem Fall sind übrigens $\delta\psi_{0/1} = 0$ (stets horizontale Tangenten bei $x = 0$, stets vertikale Tangente bei $x = x_m$; vgl. Abbildung 3.9). Die weitere Bedingung, die sich durch den freien Rand x_m ergibt ($\delta x_1 \neq 0$), läßt sich formulieren als

$$\mathcal{H}\Big|_{x_m} \stackrel{!}{=} 0. \quad (3.122)$$

3.5.6 Die Parametrisierung nach Peterson

Peterson [Mol. Cryst. Liq. Cryst. **127** (1985) 159–186] verwendet eine Parametrisierung, die Probleme mit Singularitäten (z. B. $\psi'(x_m) = \pm\infty$) und Zweideutigkeiten in $\psi(x)$ umgeht. Sein Koordinatensystem ist gegeben durch $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\phi, s)$, wobei s die Bogenlänge der Kontur ist (ebenfalls orthogonale Koordinaten). Es folgt ($\dot{f} := df/ds$):

$$\dot{x} = \cos \psi, \quad \dot{z} = -\sin \psi, \quad \frac{dz}{dx} = -\tan \psi. \quad (3.123)$$

Wie vorher ist

$$\kappa_1 = \frac{\sin \psi}{x}, \quad \kappa_2 = \dot{\psi}. \quad (3.124)$$

Wir minimieren

$$\mathcal{F} = 2\pi k_c \int_0^{s_m} ds \mathcal{L}(\psi, \dot{\psi}, x, \dot{x}, \gamma) \quad (3.125)$$

mit

$$\mathcal{L} := \frac{x}{2} \left(\frac{\sin \psi}{x} + \dot{\psi} - \kappa_0 \right)^2 + \bar{\Sigma}x + \frac{\bar{P}}{2}x^2 \sin \psi + \gamma(\dot{x} - \cos \psi) \quad (3.126)$$

unter den Nebenbedingungen

$$A = \int_0^{s_m} ds 2\pi x, \quad V = \int_0^{s_m} ds \pi x^2 \sin \psi, \quad \dot{x} = \cos \psi. \quad (3.127)$$

Dabei sind $\bar{P} := -P/k_c$ und $\bar{\Sigma} := \Sigma/k_c$. Für die geometrischen Überlegungen zu Flächenelement und Volumenscheibe sei wieder auf Abbildung 3.8 verwiesen. Wir benötigen den Term mit der Funktion γ in (3.126), da x und ψ nach (3.123) *nicht unabhängig* von einander sondern durch $\dot{x} = \cos \psi$ mit einander verknüpft sind. Um sie aber dennoch unabhängig variieren zu können, wird ihr Zusammenhang als Nebenbedingung formuliert. Damit dieser Zusammenhang an jedem Ort s besteht, benötigt man für jedes s einen Lagrange-Parameter $\gamma(s)$.

Die Randbedingungen an ψ und x als Funktionen von s sind

$$\begin{aligned} \psi(0) &= 0, & \psi(s_m) &= \pi, \\ x(0) &= 0, & x(s_m) &= 0. \end{aligned}$$

Die Bedingungen an ψ sorgen wieder dafür, dass das Vesikel auf der Rotationsachse glatt ist. Bei γ haben wir die Wahl und setzen $\gamma(0) = 0$. Die Variationen $\delta\psi$ und δx müssen natürlich bei 0 und s_m verschwinden.

Auch hier haben wir wieder einen freien Rand s_m . Vorteilhaft gegenüber der Helfrich-Parametrisierung ist aber:

- Die Singularitäten verschwinden.
- Die Funktionen $\psi(s)$ und $z(s)$ sind *einwertig*.
- Das Volumen wird nach (3.127) stets korrekt berechnet.
- Die Bedingung

$$\mathcal{H}\Big|_{s_m} = 0, \quad (3.128)$$

die wegen des freien Randes s_m besteht, ist durch die Wahl der Anfangsbedingung $\gamma(0) = 0$ *bereits erfüllt*. Begründung: Da \mathcal{L} nicht explizit von s abhängt, ist \mathcal{H} eine Erhaltungsgröße bzgl. s . Es ist

$$\mathcal{H} = \dot{\psi} \partial_{\dot{\psi}} \mathcal{L} + \dot{x} \partial_{\dot{x}} \mathcal{L} + \underbrace{\dot{\gamma} \partial_{\dot{\gamma}} \mathcal{L}}_{=0} - \mathcal{L} = \frac{x}{2} \left[U^2 - \left(\frac{\sin \psi}{x} - \kappa_0 \right)^2 \right] - \frac{1}{2} \bar{P} x^2 \sin \psi - \bar{\Sigma} x + \gamma \cos \psi. \quad (3.129)$$

Wir haben $\psi(0) = x(0) = \gamma(0) = 0$ und $U(0) = \dot{\psi}(0) = \kappa_2$. Daraus ergibt sich aber $\mathcal{H}|_{s_m} = \mathcal{H}|_0 = 0$.

Die Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\partial_X \mathcal{L} - \frac{d}{ds} \partial_{\dot{X}} \mathcal{L} = 0 \quad (X = \psi, x, \gamma) \quad (3.130)$$

lauten mit $U := \dot{\psi}$ explizit:

$$\begin{aligned} \dot{\psi} &= U \\ \dot{U} &= -\frac{U}{x} \cos \psi + \frac{\cos \psi \sin \psi}{x^2} + \frac{\gamma}{x} \sin \psi + \frac{\bar{P}x}{2} \cos \psi \\ \dot{\gamma} &= \frac{(U - \kappa_0)^2}{2} - \frac{\sin^2 \psi}{2x^2} + \bar{P}x \sin \psi + \bar{\Sigma} \\ \dot{x} &= \cos \psi \end{aligned} \quad (3.131)$$

Dies sind vier gekoppelte, hochgradig nichtlineare, gewöhnliche Differentialgleichungen 1. Ordnung.

Gesucht sind also Bahnen $(x(s), \gamma(s), \psi(s), U(s))$, die bei $s = 0$ in $(0, 0, 0, \kappa_2(0))$ starten und bei noch zu bestimmendem s_m in $(0, 0, \pi, \kappa_2(s_m))$ enden. Der Wert $\kappa_2(s_m) = U(s_m)$ geht aus der Prozedur hervor. Die Tatsache $\gamma(s_m) = 0$ folgt aus der Erhaltungsgröße $\mathcal{H}|_{s_m} = 0$ und den Endwerten $x(s_m) = 0$ und $\psi(s_m) = \pi$.

In der (numerischen) Praxis folgt man folgender Prozedur:

- i) Man wählt sich $\bar{P} > 0$, $\bar{\Sigma}$ und κ_0 . Außerdem setzt man am Anfang des Verfahrens $\kappa_2(0) = 0$ (um die potentiellen Lösungen für sämtliche Werte von κ_2 zu erhalten, siehe unten).
- ii) Man integriert die vier Differentialgleichungen (3.131) mit dem Startwert $(0, 0, 0, \kappa_2(0))$ und bestimmt dabei s_m so, daß $\psi(s_m) = \pi$. Dann wird aber i. a. $x(s_m) \neq 0$.
- iii) Man läßt $U(0) = \kappa_2(0)$ wachsen (diskret) und wiederholt ii) bis $x(s_m) = 0$. Dann ist auch $\gamma(s_m) = 0$ und $U(s_m) = \kappa_2(s_m)$. Jetzt hat man eine potentielle Kontur berechnet.
- iv) Man wiederholt ii) und iii) mit wachsendem $\kappa_2(0)$.
- v) Man sucht sich aus den berechneten potentiellen Konturen die relativen Minima von

$$\mathcal{F} = 2\pi k_c \int_0^{s_m} ds \mathcal{L}$$

heraus. Im Allgemeinen erhält man dadurch mehrere Bahnen.

- vi) Die Konturen selbst erhält man aus den bereits berechneten $x(s)$ und

$$z(s) \stackrel{(3.123)}{=} z(0) - \int_0^s dt \sin \psi(t). \quad (3.132)$$

Literatur:

- U. SEIFERT, K. BERNDL & R. LIPOWSKY, Phys. Rev. A **44** (1991) 1182–1202
- W. WINTZ, H.-G. DÖBEREINER & U. SEIFERT, Europhys. Lett. **33** (1996) 403–408 zeigen “Seestern” Vesikel, die statt einer vollen nur eine siebenfache Rotations-Symmetrie aufweisen; im Englischen heißen letztere “starfish vesicles” (but note a starfish is not a fish – sondern ein Seestern); siehe Abbildung 3.12. Im Klartext, Rotationsinvarianz tritt nicht immer auf, bei den Elementar-Anregungen, Schwingungen der Membran um die Gleichgewichtsform (nächstes Kapitel) sowieso nicht.

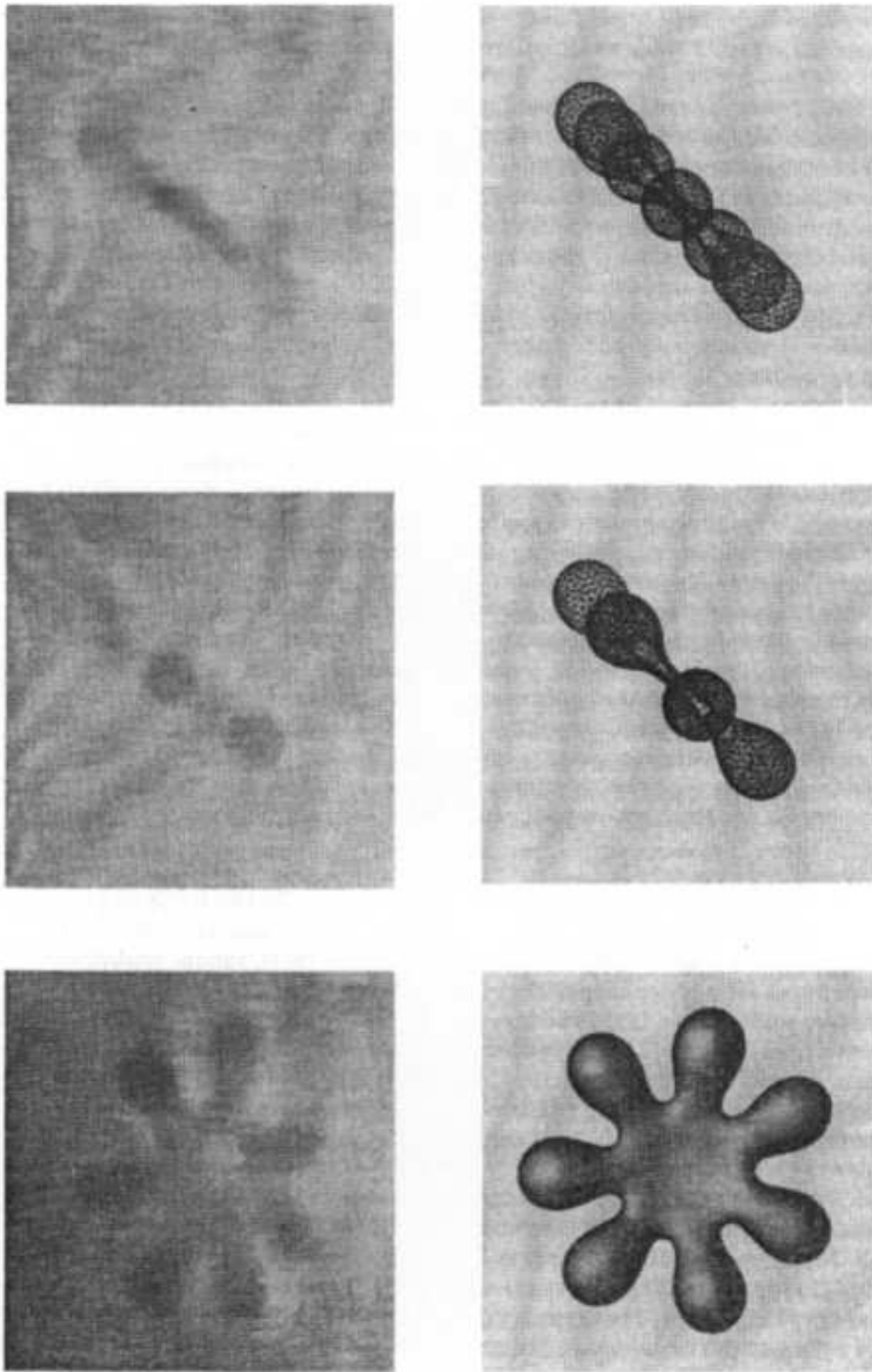


Abb. 3.12: Siebenarmiges Seestern-Vesikel. Die linke Spalte zeigt aus einem Experiment stammende Ansichten eines Vesikels. Die drei Projektionsebenen stehen jeweils senkrecht zueinander. Die rechte Spalte zeigt diese Ansichten für die entsprechende theoretisch berechnete Membranform. Aus W. Wintz, H.-G. Döbereiner & U. Seifert, *Europhys. Lett.* **33** (1996) 403–408