Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

24. **Vektordifferentialausdrücke in beliebigen krummlinigen Koordinaten**

Gegeben sei das orientierungstreue Koordinatensystem $x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$x : \boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_1(q_1, q_2, q_3) \\ x_2(q_1, q_2, q_3) \\ x_3(q_1, q_2, q_3) \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 8. Seien ∂x und ∂q die Jacobi-Matrizen der Abbildung x bzw. deren Umkehrabbildung q, die Vektoren

$$\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{q}) := \frac{\partial x}{\partial q_i}(\boldsymbol{q})$$

und der metrische Tensor $g = (g_{ij})$ mit

$$g_{ij}(\boldsymbol{q}) := \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{q}) \circ \boldsymbol{e}_j(\boldsymbol{q})\,.$$

1. Zeigen Sie, dass
$$\det \partial x = \sqrt{\det g}\,.$$
und dass g invertierbar ist.

2. Der Vektor $\boldsymbol{v}$ sei
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \sum_j v^j(\boldsymbol{x})\,\boldsymbol{e}_j\,.$$
Bezeichnen wir den Vektor $\boldsymbol{v}$ in q-Koordinaten als
$$\boldsymbol{v}^q = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}.$$
Zeigen Sie, dass
$$\boldsymbol{v}^q = \partial q\,\boldsymbol{v}$$
und
$$v^i = \sum_j g^{-1}_{ij}\boldsymbol{e}_j \circ \boldsymbol{v}\,.$$

3. Zeigen Sie, dass für das Skalarprodukt zweier Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ gilt
$$\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^{qT}\, g\,\boldsymbol{v}^q\,.$$

4. Zeigen Sie, dass für den Gradienten $(\nabla\Phi)^q$ in q-Koordinaten mit $\nabla^q := (\partial_{q_1}, \partial_{q_2}, \partial_{q_3})$ gilt
$$(\nabla\Phi)^q = g^{-1}\nabla^q\Phi\,.$$

5. Zeigen Sie, dass für die Divergenz gilt

$$\nabla \circ \boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{\det g}\, v^i \right) .$$

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$(\nabla \circ \boldsymbol{v}) \det \partial x = \frac{\partial}{\partial q_1} [\boldsymbol{v} \circ (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)] + \frac{\partial}{\partial q_2} [\boldsymbol{v} \circ (\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1)] + \frac{\partial}{\partial q_3} [\boldsymbol{v} \circ (\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2)]$$

   und dass für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ und beliebige linear unabhängige Vektoren $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\det(A\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) + \det(\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) + \det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, A\boldsymbol{e}_3) = \mathrm{Sp}\,(A)\, \det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) .$$

6. Zeigen Sie, dass für den Laplace-Operator gilt

$$\Delta \Phi = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{\det g}\, g^{-1}_{ik} \frac{\partial \Phi}{\partial q_k} \right) .$$

7. Schreiben Sie den Gradienten, die Divergenz und den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten

$$x(\boldsymbol{q}) = x(r, \varphi, h) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$$

Anmerkung: Für das Vektorprodukt zweier Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ gilt

$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \sum_{ijkl} \varepsilon_{ijk} u^i v^j g^{-1}_{kl} \sqrt{\det g}\, \boldsymbol{e}_l ,$$

was man unter Verwendung von $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})^i = \sum_j g^{-1}_{ij} \boldsymbol{e}_j \circ (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$ zeigen kann, wir jedoch nicht benötigen.