

Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

12. Hydrostatik

1. Wie lauten die Euler'schen Gleichungen für den hydrostatischen Fall ($\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{0}$)?
2. Für ein Gas gelte die Zustandsgleichung $T = T(p, \rho)$, d.h. die Temperatur T ist nur abhängig von Druck p und Dichte ρ . Zeigen Sie dass, falls die Massenkraftdichte \mathbf{f} rotationsfrei ist ($\mathbf{f} = \text{grad } U$), die Massenkraftdichte und die Dichte-, Druck- und Temperaturgradienten in jedem Punkt parallel sind:

$$\mathbf{f} \parallel \text{grad } \rho \parallel \text{grad } p \parallel \text{grad } T.$$

Hinweis: Bilden Sie dazu $\text{rot}(\rho \mathbf{f})$.

3. Man zeige: In einem Gas herrscht im hydrostatischen Fall auf Äquipotentialflächen ($U = \text{const.}$) konstanter Druck, konstante Dichte und konstante Temperatur. (Was gilt für eine inkompressible Flüssigkeit?)

13. Ausströmungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit

1. Berechnen Sie aus der Euler'schen Gleichung

$$\partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \circ \nabla) \mathbf{v} = \mathbf{f} - \frac{1}{\rho} \nabla p$$

die stationäre Ausströmungsgeschwindigkeit einer Flüssigkeit aus einer kleinen Öffnung in der Mitte des Bodens eines bis zur Höhe h gefüllten rotationssymmetrischen Gefäßes.

2. Man mache sich klar, dass die kinetische Energie der ausströmenden Flüssigkeit dem Verlust an potentieller Energie der Flüssigkeit im Gefäß entspricht.

14. Ausströmungsgeschwindigkeit eines Gases

1. Berechnen Sie aus den Euler'schen Gleichungen die stationäre Ausströmungsgeschwindigkeit eines Gases, das aus einem rotationssymmetrischen sehr großen Druckbehälter mit Innendruck p_1 in die Umgebung mit Druck p_0 strömt. Dabei gelte die Boyle-Mariotte'sche Zustandsgleichung.
2. Man mache sich klar, dass die Energie dabei erhalten bleibt.