Theoretische Biophysik I

Prof. J. L. van Hemmen

10. **Parametertransformationen und Tensoren**

Die Abbildung $\boldsymbol{x}$

$$(q^\kappa) \mapsto \boldsymbol{x}(q^\kappa)\,, \tag{1}$$

wobei $(q^\kappa) \in \mathbb{R}^n$ und $\boldsymbol{x}(q^\kappa) \in \mathbb{R}^{n+1}$, sei eine Karte einer Hyperfläche des $\mathbb{R}^n$.

1. Warum ist $(\partial_\kappa \boldsymbol{x})$ eine Basis des $\mathbb{R}^n$?
2. Die Koordinaten a^κ eines Vektors $\boldsymbol{a}$ der Hyperfläche seien gegeben durch

$$\boldsymbol{a} = a^\kappa \partial_\kappa \boldsymbol{x}\,. \tag{2}$$

   Warum sind die a^κ durch obige Gleichung eindeutig festgelegt?
3. Berechnen Sie das Verhalten der a^κ unter einer Parametertransformation $q^\kappa \mapsto q'^\kappa$.
4. Warum sind die a^κ Komponenten eines kontravarianten Tensors?
5. Warum sind die

$$a_\lambda := a^\mu g_{\mu\lambda} \tag{3}$$

   Komponenten eines kovarianten Tensors?
6. Warum ist das Skalarprodukt

$$\boldsymbol{ab} = a^\kappa \partial_\kappa \boldsymbol{x}\, b^\lambda \partial_\lambda \boldsymbol{x} \tag{4}$$

   invariant gegenüber Parametertransformation (*Tensor 0. Stufe* oder *Skalar*)?
7. Warum ist es sinnvoll

$$\partial^\lambda{}_\mu := \frac{\partial q^\lambda}{\partial q'^\mu} \tag{5}$$

   als gemischt kontra-kovarianten Tensor aufzufassen?
8. Warum ist

$$\partial_\lambda{}^\mu = \frac{\partial q'^\lambda}{\partial q^\mu}\,, \tag{6}$$

   somit $\partial^\lambda{}_\mu = (\partial_\lambda{}^\mu)^{-1}$? Denken Sie daran, dass sich hierbei die Indizes laut Definition mit dem metrischen Tensor nach oben und unten schieben lassen.