

Theoretische Biophysik I

Prof. J. L. van Hemmen

1. Logistische Abbildung

Betrachten Sie die logistische Abbildung

$$x_{t+1} = f_r(x_t) := rx_t(1 - x_t) \quad \text{für } r \in]0, 4], x_t \geq 0 \quad (1)$$

- (a) Bestimmen Sie die Fixpunkte von $f_r(x_t)$.
- (b) Diskutieren Sie die Stabilität der Fixpunkte.

Hinweis: Betrachten Sie zur Stabilitätsanalyse die führenden Terme einer Taylor-Entwicklung um den Fixpunkt und überlegen Sie, ob sich der Betrag einer kleinen Abweichung vom Fixpunkt mit der Zeit t vergrößert oder verringert. In Grenzfällen ($r = 1$, $r = 3$) sind höhere Terme der Taylor-Entwicklung heranzuziehen. Warum macht $r = 3$ trotzdem Probleme? Ziehen Sie für $r = 3$ auch die Ergebnisse von Aufgabe (c) zu Rate!

- (c) Bestimmen Sie die Grenzzyklen der Länge 2 und diskutieren Sie ihre Stabilität.
- (d) Berechnen Sie x_t , wobei sich die Startwerte x_0 in der Nähe der Fixpunkte oder Grenzzyklen befinden, numerisch für repräsentative Werte von r und überprüfen Sie Ihre Aussagen bezüglich der Stabilität der Fixpunkte und Grenzzyklen anhand der numerischen Simulation.