

Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

11. Produktregeln

Zeigen Sie für die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ und die Vektorfelder $\mathbf{a}, \mathbf{b} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$:

$$\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f) \quad (1)$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{a}) = f(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot (\nabla f) \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \quad (4)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{a}) = f(\nabla \times \mathbf{a}) + (\nabla f) \times \mathbf{a} \quad (5)$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) \quad (6)$$

Hinweis: Verwenden Sie den ε -Tensor mit

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für gerade Permutationen } (i, j, k) \in \{1, 2, 3\}^3 \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und zeigen Sie zunächst die Identität

$$\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}.$$

12. Zweite Ableitungen

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \quad (7)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (8)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \quad (9)$$

13. Schallwellen

1. Linearisieren Sie die Eulergleichungen

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) &= 0 \\ \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \cdot \nabla) \mathbf{v} &= -\frac{1}{\varrho} \nabla p,\end{aligned}$$

um $\varrho = \varrho_0$, $p = p_0$ und $\mathbf{v} = \mathbf{0}$, indem Sie $\varrho = \varrho_0 + \delta\varrho$, und $p = p_0 + \delta p$ setzen und Terme zweiter Ordnung in $\delta\varrho$, δp und \mathbf{v} vernachlässigen.¹ Beachten Sie, dass für Schallwellen in Gasen die adiabatische Zustandsgleichung

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^\gamma$$

gilt und für Flüssigkeiten und Festkörper

$$\varrho = \varrho_0(1 + \varkappa \delta p).$$

2. Wie erhält man eine Wellengleichung für $\delta\varrho$?
3. Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit in Luft und in Wasser (die Kompressibilität von Wasser beträgt $\varkappa = 50 \cdot 10^{-6} \text{bar}^{-1}$).

Besprechung der Übungen am Montag 19.11.2007 um 8.30 Uhr im Raum PH 3343, um 14.15 Uhr im Raum PH 127 und am Dienstag 20.11.2007 um 9.30 Uhr in HS3.

Übungsleitung: Dr. Moritz Franosch, mail@Franosch.org, <http://www.t35.ph.tum.de>.

¹Terme zweiter Ordnung in den entsprechenden Zeit- und Ortsableitungen dürfen auch vernachlässigt werden.