Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

24. **Differentiation von Linien-, Oberflächen-, und Volumenintegralen über mitbewegte Integrationsbereiche**

Seien $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t)$ ein Vektorfeld, $f(\boldsymbol{x},t)$ ein skalares Feld, C eine Kurve, W ein Volumen und C_t bzw. W_t deren zeitliche Entwicklung unter der Abbildung $\varphi_t(\boldsymbol{x})$ mit $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi_t(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x},t)$.

1. Zeigen Sie, dass zur Zeit $t=0$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{C_t} \boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \int\limits_{C} D_t\boldsymbol{u}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s} + \int\limits_{C} \boldsymbol{u}\cdot\partial\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}\,. \tag{1}$$

2. Begründen Sie die symbolische Schreibweise

$$D_t\mathrm{d}\boldsymbol{s} = \partial\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{s}\,. \tag{2}$$

Was bedeutet $D_t\mathrm{d}\boldsymbol{s}$ anschaulich?

3. Wiederholen Sie aus der Vorlesung, dass zur Zeit $t=0$ gilt

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{W_t} f(\boldsymbol{x},t)\,\mathrm{d}V = \int\limits_{W} \left(D_t f + f\,\mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\right)\,\mathrm{d}V\,. \tag{3}$$

4. Begründen Sie die symbolische Schreibweise

$$D_t\,\mathrm{d}V = \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}V\,. \tag{4}$$

Was bedeutet $D_t\,\mathrm{d}V$ anschaulich?

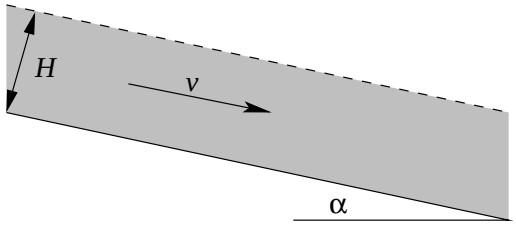
5. Zeigen Sie, dass für die materielle Ableitung des Oberflächenelements gilt

$$D_t\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} = \mathrm{div}\,\boldsymbol{v}\,\mathrm{d}\boldsymbol{A} - (\partial\boldsymbol{v})^T\mathrm{d}\boldsymbol{A}\,. \tag{5}$$

Hinweis: Beachten Sie, dass $D_t\,\mathrm{d}V = D_t((\boldsymbol{s}_1\times\boldsymbol{s}_2)\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s}) = D_t(\mathrm{d}\boldsymbol{A}\cdot\mathrm{d}\boldsymbol{s})$ und bearbeiten Sie die rechte Seite mit den obigen Formeln.

Bitte wenden.

26. **Flachwasserströmung**



1. Berechnen Sie die Geschwindigkeits- und Druckverteilung der stationären Strömung, die sich längs einer schiefen Ebene aufgrund der Schwerkraft ausbildet. Die Höhe der Strömung senkrecht zur Platte sei H, der Neigungswinkel α.
2. Welche Kraft wirkt die Wand auf das Fluid aus?
3. Der Volumendurchsatz pro Breite der Strömung sei $\dot{V}/b$. Berechnen Sie hieraus die Höhe H der Strömung.

Besprechung der Übungen am Montag den 19.12.2005 um 14-16 Uhr im Raum PH 127 (Garching) und am Dienstag, den 20.12.2005 um 9-11 Uhr im Raum PH HS3 (Garching).
Übungsleitung: Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T35/.