Lösung zur Klausur zur Mechanik der Kontinua (Theoretische Physik 4B)

Prof. J. L. van Hemmen

1. **Unterseeboot** *(8 Punkte)*

   Da Bernoulli nur für stationäre Strömungen gilt, begeben wir uns in das Bezugssystem des Bootes. Bernoulli zwischen Stagnationspunkt (1) und Oberfläche (2) (Strömung ist wirbelfrei, Atmosphärendruck p_0):

$$\begin{aligned}\frac{v_1^2}{2} + \frac{p_1}{\varrho} + z_1 g &= \frac{v_2^2}{2} + \frac{p_2}{\varrho} + z_2 g \\ 0 + \frac{p_1}{\varrho} - hg &= \frac{v^2}{2} + \frac{p_0}{\varrho} + 0 \\ p_1 &= \frac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g h + p_0\end{aligned}$$

2. **Potentialströmung** *(10 Punkte)*

   (a) $F(z) = W'(z) = 2z$

   (b)

$$\begin{aligned}v_1(x,y) &= \Re(F(z)) = 2x \\ v_2(x,y) &= -\Im(F(z)) = -2y\end{aligned}$$

   (c) Bei $z = 0$, also im Ursprung.

   (d)

$$\Psi(x,y) = \Im(W(z)) = \Im((x+iy)^2) = 2xy$$

   (e) Stromlinien werden beschrieben durch

$$\begin{aligned}\Psi(x,y) &= \lambda \\ y &= \frac{\lambda}{2x}\,.\end{aligned}$$

   Es ergeben sich also Hyperbeln.

   (f) Strömung in einer Ecke. (Die Geschwindigkeit ist parallel zu den Wänden.)

3. **Gesetz von Archimedes** *(9 Punkte)*

$$\begin{aligned}
\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} &= -\frac{1}{\varrho}\nabla p + \boldsymbol{g} + \nu\Delta\boldsymbol{v} \\
\boldsymbol{g} &= \frac{1}{\varrho}\nabla p \\
\nabla\left(\frac{1}{\varrho}p - zg\right) &= 0 \\
p &= -\varrho g z + p_0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{F}_i &= \int\limits_{\partial W} \sum_j \left[-p\delta_{ij} + \eta(\partial_j v_i + \partial_i v_j)\right] n_j \,\mathrm{d}A = \int\limits_{\partial W} -p n_i \,\mathrm{d}A \\
\boldsymbol{F} &= \int\limits_{\partial W} -p\boldsymbol{n}\,\mathrm{d}A = -\int\limits_W \nabla p \,\mathrm{d}V = \\
&= -\int\limits_W \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\varrho g \end{pmatrix} \mathrm{d}V = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ mg \end{pmatrix} = -\boldsymbol{F}_G
\end{aligned}$$

4. **Strömung über ein Wehr** *(12 Punkte)*

   (a) Euler:

$$\partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} = -\frac{1}{\varrho}\nabla p + \boldsymbol{g}$$

$$\begin{aligned}
0 &= \partial_x p \\
0 &= \partial_y p
\end{aligned}$$

   Somit ist $p = p(z)$.

$$\begin{aligned}
0 &= -\frac{1}{\varrho}\partial_z p - g \\
p &= -\varrho g z + p_0
\end{aligned}$$

   (b) Bernoulli zwischen einem Punkt auf einer Stromlinie weit flussaufwärts (Punkt 1, h_1 unter der Oberfläche) und oberhalb des Wehres (Punkt 2, h oberhalb der Oberkante des Wehres):

$$\frac{v^2}{2} + \frac{\varrho g h_1 + p_0}{\varrho} - g h_1 = \frac{v(h)^2}{2} + \frac{p_0}{\varrho} - gh$$

$$v(h) = \sqrt{2gh + v^2}$$

   Durchfluss:

$$Q = b\int\limits_0^H v(h)\,\mathrm{d}h = \frac{2b\sqrt{2g}}{3}\left[\left(H + \frac{v^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{v^2}{2g}\right)^{3/2}\right]$$

   (c) Mit $Z \to \infty$ ist $v \to 0$, somit $\frac{v^2}{2g} \ll H$, also $Q = \frac{2b\sqrt{2g}}{3}H^{3/2}$.

5. **Massenerhaltung** *(4 Punkte)*

(a) Kontinuitätsgleichung: $D_t\varrho = -\varrho \operatorname{div} \boldsymbol{v}$.

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{W_t} \varrho\,\mathrm{d}V &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int\limits_{W_0} \varrho J\,\mathrm{d}V = \\ &= \int\limits_{W_0} \left[(D_t\varrho)J + \varrho\partial_t J\right]\,\mathrm{d}V = \\ &= \int\limits_{W_0} \left[(D_t\varrho)J + \varrho(\operatorname{div}\boldsymbol{v})J\right]\,\mathrm{d}V = 0\end{aligned}$$

(b) Die Masse in einem mit der Flüssigkeit mitbewegten Volumen, d.i. die mitbewegte Masse, bleibt erhalten.

6. **Bewegter Zylinder** *(18 Punkte)*

(a) Der Ansatz $v_h = v_h(r)$ erfüllt die Kontinuitätsgleichung

$$\partial_r v_r + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r}\partial_\varphi v_\varphi + \partial_h v_h = 0\,.$$

Aus der Navier-Stokes-Gleichung in Zylinderkoordinaten ergibt sich

$$\begin{aligned}0 &= \partial_r p \\ 0 &= \partial_\varphi p\,,\end{aligned}$$

somit ist $p = p(h)$. Weiter ist

$$0 = -\frac{1}{\varrho}\partial_h p + \nu\left(\partial_{rr}v_h + \frac{1}{r}\partial_r v_h\right)\,.$$

Da $v_h = v_h(r)$ ist $\partial_h p$ von h unabhängig, also

$$p = Ch + p_0\,.$$

Wegen der Randbedingung $p = p_0$ am Rohrende ist $C = 0$ und $p = p_0$. Somit:

$$0 = \partial_{rr}v_h + \frac{1}{r}\partial_r v_h$$

Mit $f := \partial_r v_h$ ergibt sich

$$\begin{aligned}\frac{f'}{f} &= -\frac{1}{r} \qquad \int \mathrm{d}r \\ f &= Ar^{-1} \\ v_h &= A\ln r + B\end{aligned}$$

Randbedingungen: $v_h(R_1) = v$, $v_h(R_2) = 0$. Es ergibt sich

$$v_h = v\frac{\ln(R_2/r)}{\ln(R_2/R_1)}\,.$$

(b)

$$\frac{\boldsymbol{F}}{A} = \pi \boldsymbol{n} = \pi \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ 0 \\ \eta \partial_r v_h \end{pmatrix}$$

$$\frac{F_z}{A} = -\frac{\eta v}{R_1 \ln(R_2/R_1)}$$

Mit der Zylinderoberfläche $A = 2\pi R_1 L$ ergibt sich

$$\frac{F_z}{L} = -2\pi\eta v \frac{1}{\ln(R_2/R_1)} \, .$$

Die korrigierten Arbeiten sind einzusehen bei Paul Friedel, Raum 3023.