Klausur zur
Mechanik der Kontinua (Theoretische Physik 4B)

Prof. J. L. van Hemmen

1. **Unterseeboot** *(8 Punkte)*

   Ein U-Boot bewegt sich unter der Wasseroberfläche mit Geschwindigkeit v. Der vordere Stagnationspunkt (Staupunkt) der Flüssigkeitsströmung befinde sich im Abstand h unter der Wasseroberfläche. Berechnen Sie unter der Annahme eines inkompressiblen und reibungsfreien Fluids und einer stationären Strömung den Druck auf die Wandung des Boots im vorderen Stagnationspunkt.

2. **Potentialströmung** *(10 Punkte)*

   Betrachten Sie das komplexe Strömungspotential

   $$W(z) = z^2 \,.$$

   (a) Berechnen Sie das komplexe Geschwindigkeitsfeld $F(z)$.

   (b) Berechnen Sie das Geschwindigkeitsfeld $\binom{v_1(x,y)}{v_2(x,y)}$.

   (c) Wo ist der Staupunkt (Stagnationspunkt)?

   (d) Berechnen Sie die Stromfunktion.

   (e) Skizzieren Sie den Verlauf der Stromlinien im ersten Quadranten.

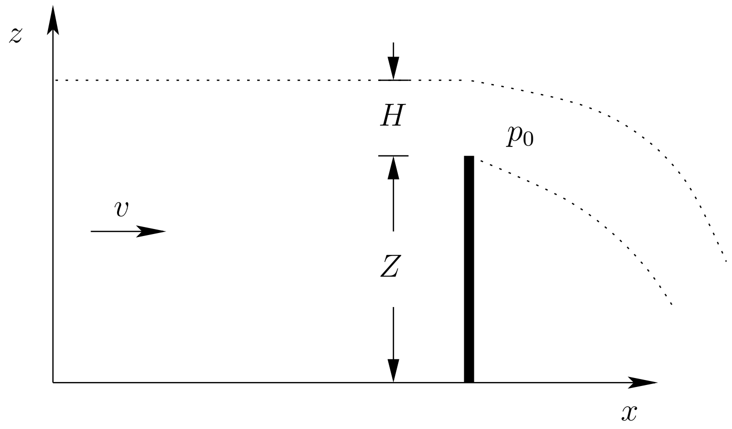
   (f) Interpretieren Sie die resultierende Strömung.

3. **Gesetz von Archimedes** *(9 Punkte)*

   Das Archimedes'sche Gesetz vom Auftrieb lautet: In einem homogenen Schwerefeld ist die statische (Auftriebs-) Kraft, welche ein Körper erfährt, der sich vollständig in einer (ruhenden) inkompressiblen Flüssigkeit befindet, gegengleich der Gewichtskraft der vom Körper verdrängten Flüssigkeit.

   Leiten Sie das Archimedes'sche Gesetz aus den Navier-Stokes-Gleichungen ab.

4. **Strömung über ein Wehr** *(12 Punkte)*



Über ein rechteckiges Wehr mit Wandhöhe Z, Breite b, strömt eine reibungsfreie, inkompressible Flüssigkeit. Die Höhe der Flüssigkeitsströmung über dem Wehr sei H, wie eingezeichnet. Sehr weit flussaufwärts sei die Strömung parallel und die Strömungsgeschwindigkeit konstant gleich v.

(a) Zeigen Sie, dass der Druck weit stromaufwärts gleich dem hydrostatischen Druck $p = \varrho g h + p_0$ ist (h ist die Tiefe unter der Flüssigkeitsoberfläche, g der Ortsfaktor, p_0 der Atmosphärendruck).

(b) Leiten Sie eine implizite Gleichung für die Strömungsgeschwindigkeit v her unter der Annahme, dass die Höhe der Flüssigkeit bis zum Wehr konstant $Z + H$ ist und dass sich die Flüssigkeit oberhalb des Wehrs nur horizontal und senkrecht zum Wehr bewegt. Nehmen Sie an, dass der Druck im ganzen Querschnitt durch die ausströmende Flüssigkeit oberhalb des Wehrs gleich dem Atmosphärendruck p_0 ist. Hinweis: Es ergibt sich

$$(Z+H)\cdot v = \frac{2}{3}\sqrt{2g}\left[\left(H+\frac{v^2}{2g}\right)^{3/2} - \left(\frac{v^2}{2g}\right)^{3/2}\right] \tag{1}$$

(c) Berechnen Sie den Durchfluss über das Wehr (Flüssigkeitsvolumen pro Zeit) unter der Annahme, $H \ll Z$ ist.

5. **Massenerhaltung** *(4 Punkte)*

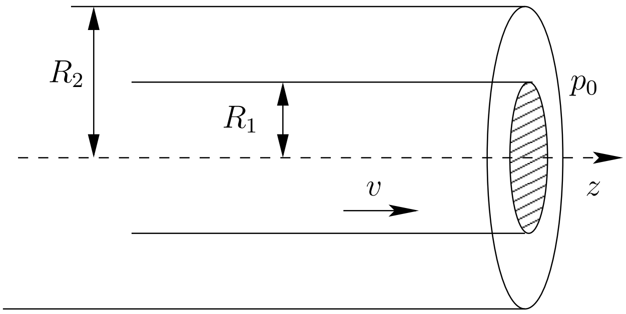
Sei ϱ die Dichte eines (kompressiblen) Fluids, $\boldsymbol{v}$ das Geschwindigkeitsfeld und W_t ein mitbewegtes Volumen zur Zeit t.

(a) Zeigen Sie aus der Kontinuitätsgleichung, dass gilt:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{W_t} \varrho \,\mathrm{d}V = 0 \tag{2}$$

(b) Interpretieren Sie obige Identität anschaulich.

6. **Bewegter Zylinder** *(18 Punkte)*



Ein sehr langer in z-Richtung ausgedehnter voller Kreiszylinder (Radius R_1) bewegt sich in einem inkompressiblen Newton'schen Fluid[1] mit konstanter Geschwindigkeit v in z-Richtung. Der Zylinder befindet sich in einem dünnwandigen Rohr mit Radius R_2. Der Druck am Rohr- und Zylinderende sei p_0.

(a) Berechnen Sie das stationäre Geschwindigkeitsfeld im Fluid (ohne Gravitation und unter Vernachlässigung von Randeffekten an den Enden des Zylinders bzw. des Rohres).

(b) Welche Widerstandskraft erfährt der Zylinder pro Länge in z-Richtung?

Hinweis (Herleitung ist nicht verlangt): Die Navier-Stokes-Gleichungen in (normierten) Zylinderkoordinaten (r, φ, h) (Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}$, Volumenkräfte $\boldsymbol{g}$, Druck p, kinematische Viskosität ν) lauten

$$\partial_t \boldsymbol{v} + \left(v_r \partial_r + \frac{v_\varphi}{r}\partial_\varphi + v_h \partial_h\right)\begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \\ v_h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{v_\varphi^2}{r} \\ \frac{v_r v_\varphi}{r} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{g} - \frac{1}{\varrho}\begin{pmatrix} \partial_r \\ \frac{1}{r}\partial_\varphi \\ \partial_h \end{pmatrix} p + \nu \begin{pmatrix} \partial_r^2 v_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v_r + \partial_h^2 v_r + \frac{1}{r}\partial_r v_r - \frac{2}{r^2}\partial_\varphi v_\varphi - \frac{v_r}{r^2} \\ \partial_r^2 v_\varphi + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v_\varphi + \partial_h^2 v_\varphi + \frac{1}{r}\partial_r v_\varphi + \frac{2}{r^2}\partial_\varphi v_r - \frac{v_\varphi}{r^2} \\ \partial_r^2 v_h + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v_h + \partial_h^2 v_h + \frac{1}{r}\partial_r v_h \end{pmatrix}, \quad (3)$$

die Divergenz lautet

$$\partial_r v_r + \frac{1}{r} v_r + \frac{1}{r}\partial_\varphi v_\varphi + \partial_h v_h \,, \quad (4)$$

der Spannungstensor (dynamische Viskosität η) lautet

$$\pi = \begin{pmatrix} -p + 2\eta\partial_r v_r & \eta\left(\frac{1}{r}\partial_\varphi v_r + \partial_r v_\varphi - \frac{1}{r}v_\varphi\right) & \eta\left(\partial_r v_h + \partial_h v_r\right) \\ & -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\partial_\varphi v_\varphi + \frac{1}{r}v_r\right) & \eta\left(\partial_h v_\varphi + \frac{1}{r}\partial_\varphi v_h\right) \\ & & -p + 2\eta\partial_h v_h \end{pmatrix} \quad (5)$$

(nicht angegebene Matrixelemente sind symmetrisch).

Übungsleitung: Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T35/.

[1] Die Schubspannung ist proportional zur ersten Ableitung der Geschwindigkeit.