

## Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

### 11. Produktregeln

Zeigen Sie für die Funktionen  $f, g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$  und die Vektorfelder  $\mathbf{a}, \mathbf{b} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ :

$$\nabla(fg) = f(\nabla g) + g(\nabla f) \quad (1)$$

$$\nabla(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \times (\nabla \times \mathbf{b}) + \mathbf{b} \times (\nabla \times \mathbf{a}) + (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot (f\mathbf{a}) = f(\nabla \cdot \mathbf{a}) + \mathbf{a} \cdot (\nabla f) \quad (3)$$

$$\nabla \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) - \mathbf{a} \cdot (\nabla \times \mathbf{b}) \quad (4)$$

$$\nabla \times (f\mathbf{a}) = f(\nabla \times \mathbf{a}) + (\nabla f) \times \mathbf{a} \quad (5)$$

$$\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{b} \cdot \nabla)\mathbf{a} - (\mathbf{a} \cdot \nabla)\mathbf{b} + \mathbf{a}(\nabla \cdot \mathbf{b}) - \mathbf{b}(\nabla \cdot \mathbf{a}) \quad (6)$$

Hinweis: Verwenden Sie den  $\varepsilon$ -Tensor mit

$$\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für gerade Permutationen } (i, j, k) \in \{1, 2, 3\}^3 \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und zeigen Sie zunächst die Identität

$$\sum_k \varepsilon_{ijk} \varepsilon_{klm} = \delta_{il} \delta_{jm} - \delta_{im} \delta_{jl}.$$

### 12. Zweite Ableitungen

$$\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{a}) = 0 \quad (7)$$

$$\nabla \times (\nabla f) = 0 \quad (8)$$

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{a}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{a}) - \nabla^2 \mathbf{a} \quad (9)$$

### 13. Schallwellen

1. Linearisieren Sie die Eulergleichungen

$$\begin{aligned}\partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho \mathbf{v}) &= 0 \\ \partial_t v_i + \sum_{j=1}^3 (\partial_j v_i) v_j &= -\frac{1}{\varrho} \partial_i p,\end{aligned}$$

um  $\varrho = \varrho_0$ ,  $p = p_0$  und  $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , indem Sie  $\varrho = \varrho_0 + \Delta\varrho$ , und  $p = p_0 + \Delta p$  setzen und Terme zweiter Ordnung in  $\Delta\varrho$ ,  $\Delta p$  und  $\mathbf{v}$  vernachlässigen. Beachten Sie, dass für Schallwellen in Gasen die adiabatische Zustandsgleichung

$$\frac{p}{p_0} = \left( \frac{\varrho}{\varrho_0} \right)^\gamma$$

gilt und für Flüssigkeiten und Festkörper

$$\varrho = \varrho_0(1 + \varkappa \Delta p).$$

2. Wie erhält man eine Wellengleichung für  $\Delta\varrho$ ?
3. Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit in Luft und in Wasser (die Kompressibilität von Wasser beträgt  $\varkappa = 50 \cdot 10^{-6} \text{bar}^{-1}$ ).