

## Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

### 6. Gaußscher Integralsatz

Beweisen Sie den Gaußschen Integralsatz für

1. den Spezialfall des Geschwindigkeitsfelds in einer zylindrischen Röhre (Achse ist die  $x$ -Achse), die von einer Flüssigkeit mit Geschwindigkeit  $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(x, y, z) = (v(x), 0, 0)$  durchströmt wird. Das Integrationsvolumen sei der Zylinder.

Warum ist bei einer inkompressiblen Flüssigkeit  $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$ ?

Warum gilt für die Dichte

$$\frac{\partial \varrho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} [\varrho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)] ?$$

2. ein beliebiges Vektorfeld  $\mathbf{v}(\mathbf{x})$  und einen achsparallelen Quader als Integrationsvolumen.

### 7. Rotierende Flüssigkeit

Das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit sei

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x} .$$

1. Zeigen Sie, dass für Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  gilt

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \circ \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\mathbf{c} .$$

2. Berechnen Sie

$$\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}) ,$$

indem Sie die Formel von 1. verwenden.

3. Berechnen Sie  $\operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{x})$  für den Spezialfall  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_3)$  direkt durch Differenzieren. Wie lässt sich das Ergebnis auf  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  verallgemeinern?

4. Berechnen Sie  $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x})$ .

5. Berechnen Sie den Verzerrungstensor

$$D = (d_{ij}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) .$$

## 8. Koordinatentransformationen

Ein Diffeomorphismus  $x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,

$$x : \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_1(q_1, q_2, q_3) \\ x_2(q_1, q_2, q_3) \\ x_3(q_1, q_2, q_3) \end{pmatrix}$$

heißt Koordinatensystem des  $\mathbb{R}^3$ .

1. Zeigen Sie, dass für die Jacobi-Matrizen der Abbildung  $x$  und deren Umkehrabbildung  $q$  gilt

$$\partial x(\mathbf{q}) = [\partial q(\mathbf{x})]^{-1}$$

2. Zeigen Sie, dass  $(\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial x}{\partial q_2}, \frac{\partial x}{\partial q_3})$  eine Basis des  $\mathbb{R}^3$  ist.
3. Berechnen sie das Verhalten der Komponenten  $v^j$  des Vektorfeldes

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_j v^j(\mathbf{x}) \frac{\partial x}{\partial q_j}$$

unter einer Koordinatentransformation  $(q_1, q_2, q_3) \mapsto (q'_1, q'_2, q'_3)$ .