Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

34. Hydrodynamik eines Plasmas

1. Plasma heißt der Zustand der Materie, in dem sich geladene Teilchen frei bewegen können, z.B. Gase bei Fusionsexperimenten und in Quecksilber. Wir benötigen zunächst die hydrodynamischen Gleichungen, welche lauten:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho_m &= -\nabla \circ (\varrho_m \mathbf{v}) \qquad \text{(Kontinuitätsgleichung)} && (1)\\ \varrho_m D_t \mathbf{v} &= \mathbf{f} - \nabla p \qquad \text{(Euler-Gleichung)} && (2)\\ \varrho_m &= \varrho_m(p) \qquad \text{(Zustandsgleichung).} && (3) \end{aligned}$$

Wir nehmen hier an, dass die Dichte nur vom Druck abhängt und dass die Temperatur konstant ist. Zeigen Sie, dass gilt

$$\partial_t (\varrho_m \mathbf{v}) = \mathbf{f} - \nabla^T \left(\varrho_m \mathbf{v}\mathbf{v}^T + p\mathbb{1} \right), \tag{4}$$

und interpretieren Sie das Resultat.

2. Die elektromagnetischen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{E} &= c\nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{j}_e && (5)\\ \partial_t \mathbf{B} &= -c\nabla \times \mathbf{E} && (6)\\ \nabla \circ \mathbf{E} &= \varrho_e && (7)\\ \nabla \circ \mathbf{B} &= 0 && (8)\\ \mathbf{I}_e &:= \mathbf{j}_e - \varrho_e \mathbf{v} = \sigma \left(\mathbf{E} + c^{-1} \mathbf{v} \times \mathbf{B} \right) \qquad \text{(Ohm'sches Gesetz)} && (9)\\ \mathbf{f} &= \varrho_e \mathbf{E} + c^{-1} \mathbf{j}_e \times \mathbf{B} \qquad \text{(Lorentz-Kraft),} && (10) \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{E}$ die elektrische Feldstärke, $\mathbf{B}$ die magnetische Flussdichte, c die Lichtgeschwindigkeit, $\mathbf{j}_e$ die elektrische Stromdichte, ϱ_e die elektrische Ladung und σ die Leitfähigkeit bedeuten. Der durch die Leitfähigkeit verursachte ohmsche Strom $\mathbf{I}_e$, der gleich dem gesamten Strom *minus* dem durch die Bewegung der Flüssigkeit verursachten elektrischen Strom ist, proportional zum elektrischen Feld, *wie es ein mit der Flüssigkeit mitbewegter Beobachter sieht*, daher der Term $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$.
Zeigen Sie Ladungserhaltung aus den obigen Gleichungen:

$$\partial_t \varrho_e = -\nabla \circ \mathbf{j}_e \tag{11}$$

3. Wir führen nun geeignete Näherungen ein, damit das Gleichungssystem einfacher zu lösen ist. Zunächst betrachten wir die Rotation von der magnetische Flussdichte $\mathbf{B}$. Für Prozesse, welche etwa die Zeit τ benötigen, können wir die Zeitableitung durch

$$\partial_t g \approx \tau_g^{-1} g =: \omega_g g. \tag{12}$$

schätzen. In Plasmen ist die Leitfähigkeit σ i.d.R. sehr groß. Überlegen Sie sich, warum man bei sich langsam verändernden Feldern Gleichung (5) nähern kann durch

$$\nabla \times \mathbf{B} = c^{-1}\mathbf{j}_e. \tag{13}$$

4. Wir führen nun die *magnetische Reynolds-Zahl* $\mathcal{R}_M := \frac{\sigma L v}{c^2}$ ein. Die Länge L ist die charakteristische Länge, unter der sich die Systemgrößen wesentlich ändern. Die magnetische Reynolds-Zahl ist ein Maß dafür, wie stark die magnetischen Kräfte im Plasma sind. In den meisten Plasmen ist $\mathcal{R}_M \gg 1$, was zu zwei weiteren Vereinfachungen führt.
   Genau so wie bei der Zeitableitung können wir die räumlichen Ableitungen unter Verwendung der charakteristischen Länge schätzen:

$$\nabla g \approx L^{-1} g. \tag{14}$$

   Zeigen Sie, dass bei großer magnetischen Reynolds-Zahl das Ohm'sche Gesetz vereinfacht werden kann zu

$$\mathbf{j}_e = \sigma \left(\mathbf{E} + c^{-1}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \tag{15}$$

5. und die Lorentzkraft genähert werden kann durch

$$\mathbf{f} = c^{-1}\mathbf{j}_e \times \mathbf{B}\,. \tag{16}$$

6. Wir haben nun die folgenden Gleichungen abgeleitet, welche das System vollständig beschreiben:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho_m &= -\nabla \circ (\varrho_m \mathbf{v}) && (17)\\ \partial_t (\varrho_m \mathbf{v}) &= c^{-1}\mathbf{j}_e \times \mathbf{B} - \nabla^T \left(\varrho_m \mathbf{v}\mathbf{v}^T + p(\varrho_m)\mathbb{1}\right) && (18)\\ \partial_t \mathbf{B} &= -c\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + c^2\sigma^{-1}\Delta\mathbf{B}. && (19) \end{aligned}$$

   Das elektrische Feld sowie elektrische Ladungs- und Stromdichte können berechnet werden durch

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= c\sigma^{-1}\nabla \times \mathbf{B} - c^{-1}\mathbf{v} \times \mathbf{B} && (20)\\ \varrho_e &= \nabla \circ \mathbf{E} && (21)\\ \mathbf{j}_e &= c\nabla \times \mathbf{B}\,. && (22) \end{aligned}$$

   Die Anfangsbedingungen müssen natürlich $\nabla \circ \mathbf{B} = 0$ erfüllen. Diese Bedingung bleibt wegen Gleichung (19) erhalten.
   Zeigen Sie, dass der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (19) für $\mathcal{R}_M \gg 1$ dominiert.

7. Zeigen Sie, dass der magnetische Fluss durch eine mit dem Plasma mitbewegte Oberfläche

$$\Phi_M := \int_{S(t)} \mathbf{B} \circ \mathbf{ds}\,. \tag{23}$$

   konstant ist. Die magnetischen Feldlinien sind also im Plasma „eingefroren".

8. Was passiert mit dem magnetischen Fluss in dem Fall dass der *zweite* Term auf der rechten Seite von Gleichung (19) dominiert?

Besprechung der Übungen am Dienstag, den 8.2.2005 um 9.30 Uhr im Raum HS3 (Garching).
Übungsleitung: Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T35/.