Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

29. **Spannungstensor in allgemeinen Koordinaten und in Zylinderkoordinaten**

    1. Man mache sich aus der Vorlesung klar, dass die Kraft auf ein Fluid pro Oberflächeneinheit mit Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ bei einem inkompressiblen Newton'schen Fluid $\pi\boldsymbol{n}$ ist, wobei für den Spannungstensor

    $$\pi_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_i}{\partial x_j}\right)$$

    gilt.

    2. Zeigen Sie, dass sich für den Spannungstensor π in den q-Koordinaten von Aufgabe 20 ergibt:

    $$\pi^q_{ij} = -p\,I + \eta\left[\partial q\left[(\boldsymbol{v}^q \circ \nabla^q)\,\partial x\right] + \left(\frac{\partial v^i}{\partial q_j}\right)_{ij} + g^{-1}\left[(\boldsymbol{v}^q \circ \nabla^q)\partial x\right]^T \partial x + g^{-1}\left(\frac{\partial v^j}{\partial q_i}\right)^T_{ij} g\right]$$

    3. Wie lautet der Spannungstensor in Zylinderkoordinaten?

30. **Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten**

    Schreiben Sie die Navier-Stokes-Gleichungen für eine inkompressible Flüssigkeit

    $$\begin{aligned} \operatorname{div}\boldsymbol{v} &= 0 \\ \partial_t\boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\circ\nabla)\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{f} - \frac{1}{\varrho}\nabla p + \nu\Delta\boldsymbol{v} \end{aligned}$$

    in Zylinderkoordinaten $\boldsymbol{v}(r,\varphi,h) = (v^r, v^\varphi, v^h)$, $\boldsymbol{f}(r,\varphi,h) = (f^r, f^\varphi, f^h)$, $\varrho(r,\varphi,h)$, $p(r,\varphi,h)$ (vgl. Aufgabe 27).

Bitte wenden.

31. **Couette-Strömung**

Zwei koaxiale Kreiszylinder, der innere mit Außenradius R_1, der äußere mit Innenradius R_2, rotieren mit den Winkelgeschwindigkeiten ω_1 bzw. ω_2. Dazwischen befindet sich ein viskoses Newton'sches Fluid. Die sich ausbildene Strömung heißt Couette-Strömung.

1. Berechnen Sie den Geschwindigkeitsverlauf der stationären Strömung. Die Volumenkräfte seien vernachlässigbar.
2. Was ergibt sich für $R_1 = 0$?
3. Was ergibt sich für $\omega_2 = 0$ und $R_2 \to \infty$?
4. Zur Messung der Zähigkeit einer Flüssigkeit kann man das Couette-Viskosimeter verwenden: Der innere Zylinder hängt an einem Torsionsfaden und ruht im stationären Fall, der äußere bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Anhand der Verdrillung des Torsionsfadens wird das auf den inneren Zylinder wirkende Drehmoment M gemessen. Berechnen Sie hieraus die Zähigkeit.

Besprechung der Übungen am Dienstag, den 25.1.2005 um 9.30 Uhr im Raum HS3 (Garching).
Übungsleitung: Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T35/.