

Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

20. Vektordifferentialausdrücke in beliebigen krummlinigen Koordinaten

Gegeben sei das orientierungstreue Koordinatensystem $x : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$,

$$x : \mathbf{q} = (q_1, q_2, q_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_1(q_1, q_2, q_3) \\ x_2(q_1, q_2, q_3) \\ x_3(q_1, q_2, q_3) \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 9. Seien ∂x die Jacobi-Matrizen der Abbildung x bzw. deren Umkehrabbildung q , die Vektoren

$$\mathbf{e}_i(\mathbf{q}) := \frac{\partial x}{\partial q_i}(\mathbf{q})$$

und der metrische Tensor $g = (g_{ij})$ mit

$$g_{ij}(\mathbf{q}) := \mathbf{e}_i(\mathbf{q}) \circ \mathbf{e}_j(\mathbf{q}).$$

1. Zeigen Sie, dass

$$\det \partial x = \sqrt{\det g}.$$

und dass g invertierbar ist.

2. Der Vektor \mathbf{v} sei

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \sum_j v^j(\mathbf{x}) \mathbf{e}_j.$$

Bezeichnen wir den Vektor \mathbf{v} in q -Koordinaten als

$$\mathbf{v}^q = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass

$$\mathbf{v}^q = \partial q \mathbf{v}$$

und

$$v^i = \sum_j g_{ij}^{-1} \mathbf{e}_j \circ \mathbf{v}.$$

3. Zeigen Sie, dass für das Skalarprodukt zweier Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} gilt

$$\mathbf{u} \circ \mathbf{v} = \mathbf{u}^{qT} g \mathbf{v}^q.$$

4. Zeigen Sie, dass für das Vektorprodukt zweier Vektoren \mathbf{u} und \mathbf{v} gilt

$$\mathbf{u} \times \mathbf{v} = \sum_{ijkl} \varepsilon_{ijk} u^i v^j g_{kl}^{-1} \sqrt{\det g} \mathbf{e}_l.$$

Hinweis: Verwenden Sie $(\mathbf{u} \times \mathbf{v})^i = \sum_j g_{ij}^{-1} \mathbf{e}_j \circ (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$.

5. Zeigen Sie, dass für den Gradienten $(\nabla\Phi)^q$ in q -Koordinaten mit $\nabla^q := (\partial_{q_1}, \partial_{q_2}, \partial_{q_3})$ gilt

$$(\nabla\Phi)^q = g^{-1}\nabla^q\Phi.$$

6. Zeigen Sie, dass für die Divergenz gilt

$$\nabla \circ \mathbf{v} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{\det g} v^i \right).$$

Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$(\nabla \circ \mathbf{v}) \det \partial x = \frac{\partial}{\partial q_1} [\mathbf{v} \circ (\mathbf{e}_2 \times \mathbf{e}_3)] + \frac{\partial}{\partial q_2} [\mathbf{v} \circ (\mathbf{e}_3 \times \mathbf{e}_1)] + \frac{\partial}{\partial q_3} [\mathbf{v} \circ (\mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2)]$$

und dass für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$ und beliebige Vektoren $\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\det(A\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \det(\mathbf{e}_1, A\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3) + \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, A\mathbf{e}_3) = \text{Sp}(A) \det(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3).$$

7. Zeigen Sie, dass für den Laplace-Operator gilt

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{\det g} g_{ik}^{-1} \frac{\partial\Phi}{\partial q_k} \right).$$

8. Schreiben Sie den Gradienten, die Divergenz und den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten

$$x(\mathbf{q}) = x(r, \varphi, h) = \begin{pmatrix} r \cos(\varphi) \\ r \sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$$