Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

14. **Totale Ableitung**

Beweisen Sie für die Funktionen $f : (x, y, z, t) \mapsto f(x, y, z, t)$, g und h und $\lambda \in \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften der totalen Ableitung D_t:

1. Additivität
$$\mathrm{D}_t(f + g) = \mathrm{D}_t f + \mathrm{D}_t g$$
2. Homogenität
$$\mathrm{D}_t(\lambda f) = \lambda\, \mathrm{D}_t f$$
3. Produktregel
$$\mathrm{D}_t(f \cdot g) = f\, \mathrm{D}_t g + g\, \mathrm{D}_t f$$
4. Kettenregel
$$\mathrm{D}_t(h \circ g) = (h' \circ g)\, \mathrm{D}_t g$$

15. **Rotierende Flüssigkeit**

Das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit sei

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}\,.$$

1. Zeigen Sie, dass für Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt
$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\,.$$
2. Berechnen Sie
$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \nabla \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\,,$$
indem Sie die Formel von 1. verwenden.
3. Berechnen Sie rot $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ für den Spezialfall $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_3)$ direkt durch Differenzieren. Wie lässt sich das Ergebnis auf $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ verallgemeinern?
4. Berechnen Sie div $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$.
5. Berechnen Sie den Verzerrungstensor
$$D = (d_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\,.$$