

## Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

### 14. Totale Ableitung

Beweisen Sie für die Funktionen  $f : (x, y, z, t) \mapsto f(x, y, z, t)$ ,  $g$  und  $h$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  folgende Eigenschaften der totalen Ableitung  $D_t$ :

1. Additivität

$$D_t(f + g) = D_t f + D_t g$$

2. Homogenität

$$D_t(\lambda f) = \lambda D_t f$$

3. Produktregel

$$D_t(f \cdot g) = f D_t g + g D_t f$$

4. Kettenregel

$$D_t(h \circ g) = (h' \circ g) D_t g$$

### 15. Rotierende Flüssigkeit

Das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit sei

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}.$$

1. Zeigen Sie, dass für Vektoren  $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c} \in \mathbb{R}^3$  gilt

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \circ \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \circ \mathbf{b})\mathbf{c}.$$

2. Berechnen Sie

$$\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x}) = \nabla \times \mathbf{v}(\mathbf{x}),$$

indem Sie die Formel von 1. verwenden.

3. Berechnen Sie  $\text{rot } \mathbf{v}(\mathbf{x})$  für den Spezialfall  $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_3)$  direkt durch Differenzieren. Wie lässt sich das Ergebnis auf  $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$  verallgemeinern?

4. Berechnen Sie  $\text{div } \mathbf{v}(\mathbf{x})$ .

5. Berechnen Sie den Verzerrungstensor

$$D = (d_{ij}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right).$$