

Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

11. Verzerrungstensor

Man betrachte einen achsparallelen Quader mit kleinen Kantenlängen (l_1, l_2, l_3) , der von den Vektoren $(l_1 \mathbf{e}_1, l_2 \mathbf{e}_2, l_3 \mathbf{e}_3)$ aufgespannt wird. Dieser erfahre eine durch das Vektorfeld

$$\mathbf{u} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) dt$$

gegebene kleine Verrückung. Größen zweiter Ordnung in dt sind im Folgenden zu vernachlässigen.

1. Sei \mathbf{r} ein Punkt im Quader vor der Verrückung und \mathbf{r}' der entsprechende Punkt nach der Verrückung. Der Quader wird durch \mathbf{u} transliert, gedreht und verzerrt. Man mache sich klar, dass in einem mit dem Quader mittranslierten und mitgedrehten Koordinatensystem gilt

$$\mathbf{r}' \approx \mathbf{r} + D\mathbf{r},$$

wobei

$$D = (d_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

der Verzerrungstensor ist.

2. Zeigen Sie, dass für die relative Längenänderung einer Kante $\mathbf{r}_i = l_i \mathbf{e}_i$ des Quaders gilt

$$\frac{|\mathbf{r}'_i| - |\mathbf{r}_i|}{|\mathbf{r}_i|} \approx d_{ii}.$$

3. Die Kanten \mathbf{r}_i und \mathbf{r}_j des Quaders schließen vor der Deformation einen Winkel $\pi/2$ ein, nach der (kleinen) Deformation sei der Winkel $\pi/2 - \delta_{ij}$. Zeigen Sie, dass gilt

$$\sin \delta_{ij} \approx 2d_{ij}.$$

4. Zeigen Sie durch Berechnung der Determinante von $D + I$, dass für das Volumen $V' = \mathbf{r}'_1 \circ (\mathbf{r}'_2 \times \mathbf{r}'_3)$ des verzerrten Quaders gilt

$$\frac{V' - V}{V} = \sum_{i=1}^3 d_{ii}.$$