Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

1. **Tensorzerlegung**

   Zeigen Sie, dass sich jeder reelle (kovariante) Tensor 2. Ordnung t_{ij} als Summe eines spurfreien symmetrischen, eines antisymmetrischen und eines Tensors der Form $c\,\delta_{ij}$ schreiben lässt, wobei $c \in \mathbb{R}$ und δ_{ij} das Kronecker-Delta bezeichnet.

2. **Kreuzprodukt**

   Zeigen Sie dass es zu jedem $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ eine eindeutige antisymmetrische Matrix Ω gibt, für die für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt

   $$\Omega\,\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

3. **Drehung**

   Sei Ω eine antisymmetrische 3×3 Matrix und $\varepsilon > 0$ klein.

   (i) Interpretieren Sie geometrisch die Abbildung

   $$D(\varepsilon)\,\mathbf{v} = (\mathbb{1} + \varepsilon\,\Omega)\,\mathbf{v}\ .$$

   Benutzen Sie dazu die Darstellung von Ω aus Aufgabe 2 und rechnen Sie in einem Koordinatensystem, in dem gilt $\boldsymbol{\omega}= (0, 0, 1)^T$.

   (ii) Berechnen Sie die n-te Iteration $D(\varepsilon)^n\,\mathbf{v}$.

   (iii) Berechnen und interpretieren Sie $\lim_{n\to\infty} D(\varphi/n)^n$.

4. **Dehnung**

   Argumentieren Sie geometrisch, analog zu 3., dass der Tensor $c\,\delta_{ij}$ aus Aufgabe 1 einer Dehnung entspricht.

5. **Ableitungen eines Vektorfelds**

   Zeigen Sie, dass die Ableitung $\nabla_i u_j = \frac{\partial u_j(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_i}$ des Vektorfelds $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ein Tensor ist. Wenden Sie die Zerlegung aus 1. auf die Ableitung des Vektorfelds an. Drücken Sie das Resultat mittels der aus der Vektoranalysis bekannten Operatoren rot und div aus.

Besprechung der Übungen am 3.11.2003 um 14.15 Uhr im Raum PH 127 (Garching).
Übungsleitung: Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T35/.