Physik Department
TU München
Theoretische Physik

SoSe 2007
Übungsblatt 6
22.6.2007

Übung zur theoretischen Physik neuronaler Informationsverarbeitung
(Prof. J. L. van Hemmen)

Aufgabe 1: Hopfield-Modell

Gegeben seinen N Neuronen mit Zuständen $S_i(t) \in \{+1, -1\}$ zur Zeit t und q Muster $\xi_i^\mu \in \{+1, -1\}$, wobei $1 \leqslant i \leqslant N$ und $1 \leqslant \mu \leqslant q$. Die Muster $\boldsymbol{\xi}^\mu = (\xi_1^\mu, \ldots, \xi_N^\mu)$ bestehen aus unabhängigen, identisch verteilten Zufallszahlen mit Mittelwert 0. Das lokale Potential $h_i(t)$ an Neuron i ist

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^{N} J_{ij} S_j(t)\,. \tag{1}$$

Der Zustand $\boldsymbol{S}$ zum Zeitschritt $t + \Delta t$ ergibt sich aus dem Zustand zur Zeit t entsprechend der deterministischen Dynamik

$$S_i(t + \Delta t) = \operatorname{sgn}(h_i(t))\,. \tag{2}$$

Die q Muster seien zuvor bereits durch die Hebb'sche Regel

$$J_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{q} \xi_i^\mu \xi_j^\mu & \text{für } i \neq j \\ 0 & \text{für } i = j \end{cases} \tag{3}$$

gelernt worden. Ein derartiges Netzwerk stellt einen assoziativen Speicher dar, dessen Attraktoren den gespeicherten Mustern entsprechen.

1. Der Anfangszustand des Netzes sei ein beliebiges Muster (z.B. $\boldsymbol{S}(t_0) = \boldsymbol{\xi}^\nu$). Berechnen Sie die maximal speicherbare Zahl der Muster $q_{\max}$ für $N \to \infty$, wenn zur Zeit $t_0 + \Delta t$
   (a) die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiges Neuron instabil ist, näherungsweise kleiner als $1\,\%$ sein soll.
   (b) alle Spins mit $99\,\%$-iger Wahrscheinlichkeit richtig sein müssen.
   Hinweis: Verwenden Sie für das Gauß'sche Fehlerintegral

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{4}$$

   die Abschätzung

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x + \sqrt{x^2+2}} < 1 - \operatorname{erf}(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x + \sqrt{x^2 + \frac{4}{\pi}}}\,. \tag{5}$$

Bitte wenden.

2. (a) Zeigen Sie, dass

$$H(t) = -\sum_{i=1}^{N} |h_i(t)| \tag{6}$$

eine Lyapunovfunktion bezüglich der oben angegebenen Dynamik mit beliebigen J_{ij} ist.

(b) Zeigen Sie, dass bei zufällig gewählten Synapsenstärken J_{ij} (z.B. gleichverteilt aus $[-1, 1]$) die Dynamik mit Wahrscheinlichkeit 1 entweder zu einem Fixpunkt konvergiert oder zu einem $2\Delta t$-periodischen Grenzzyklus.

Aufgabe 2: Simulation eines Hopfield-Netzes

Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung eines Hopfield-Netzes aus $N = 100$ Neuronen im Computer.

Bestimmen Sie dazu zunächst q Muster $\boldsymbol{\xi}^\mu$, $1 \leqslant \mu \leqslant q$, wobei die ξ_i^μ mit jeweils Wahrscheinlichkeit 1/2 auf +1 oder −1 gesetzt werden. Berechnen Sie dann nach (3) die synaptischen Gewichte J_{ij}.

Lassen Sie das Netzwerk mit allen Mustern als Anfangszustand, also

$$S_i(t_0) = \xi_i^\mu \,, \tag{7}$$

für $\mu = 1, \ldots, q$, laufen.

Wieviele Muster werden korrekt „erinnert“, sind also Fixpunkte unter der Dynamik (2)?

Berechnen Sie mit Ihrem Programm, welcher Prozentsatz an Mustern korrekt erinnert wird für $q = 1, \ldots, 100$.

Steigern Sie auf $N = 1000$ Neuronen und $q = 10, 20, 30, \ldots, 200$!

Besprechung der Übungen am Freitag, den 6.7.2007 um 9.30 Uhr im Raum PH 2271 (Garching).

Übungsleitung:
Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T35/.