

**Übung zur theoretischen Physik neuronaler Informationsverarbeitung**  
(Prof. J. L. van Hemmen)

**Aufgabe 1: Ionenfluss durch eine Membran**

1. Die (molare) Ionenflussdichte durch eine Membran setzt sich zusammen aus einem Diffusionsbeitrag (hervorgerufen durch einen Konzentrationsgradienten) und einem Beitrag, der durch ein elektrisches Feld  $E$  in der Membran bestimmt wird. Wir betrachten einen eindimensionalen Querschnitt durch die Membran. Hierbei seien:

$z$ : Valenz der Ionen

$D$ : Diffusionskonstante

$\mu$ : Beweglichkeit der Ionen (Geschwindigkeit der Ionen:  $v = \mu \frac{z}{|z|} E$ )

$\Phi(x, t)$ : elektrisches Potenzial am Ort  $x$  zur Zeit  $t$

$C(x, t)$ : (molare) Konzentration der Ionen am Ort  $x$  zur Zeit  $t$

Begründen Sie die Gleichung für die molare Ionenflussdichte  $J(x, t)$  am Ort  $x$  zur Zeit  $t$

$$J(x, t) = -D \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} - \mu \frac{z}{|z|} \frac{\partial \Phi(x, t)}{\partial x} C(x, t) .$$

Bemerkung: Ist  $F$  die Faraday-Konstante, dann hängen nach der Einstein-Relation die Diffusionskonstante und die Beweglichkeit gemäß

$$D = \frac{RT}{|z|F} \mu$$

zusammen.

2. Im stationären Fall ist die Ionenflussdichte eine Konstante:  $J(x) = J$ . (Warum?) Dasselbe gilt auch für die elektrische Stromdichte  $j = zFJ$ . Die Gleichung aus 1. heißt dann (*stationäre*) *Nernst-Planck Gleichung*. Geben Sie ihre allgemeine Lösung  $C(x)$  an, gegeben  $\Phi(x)$ .
3. Nehmen wir nun eine Membran der Dicke  $\Delta$  an. Gewinnen Sie aus der Lösung von 2. einen Ausdruck für die Stromdichte  $j$  in Abhängigkeit des Spannungsverlaufs  $\Phi(x)$  in der Membran, der Membranspannung  $V_m$  und der Innen- und Außen-Konzentrationen  $C_i$  und  $C_a$  der Ionen.

4. Gegeben seien jetzt  $n$  Ionensorten derselben Valenz  $z$ . Ihre Diffusionskonstanten seien  $D_1, \dots, D_n$ . Ihre Permeabilitäten sind  $P_k := D_k/\Delta$  ( $k = 1, \dots, n$ ). Berechnen Sie die stationäre Membranspannung als Funktion der Innen- und Außen-Konzentrationen und Permeabilitäten der Ionen. (Spezialfall: Bei nur einer Ionensorte ergibt sich das Nernst-Potential.) Welche Annahme fehlt noch, um die Goldman-Gleichung herleiten zu können? Leiten Sie die Goldman-Gleichung für  $z_k = \pm 1$  her!

---

Besprechung der Übungen am Freitag, den 11.5.2007 um 9.15 Uhr im Raum PH 2271 (Garching).

Übungsleitung:

Moritz Franosch, [mail@Franosch.org](mailto:mail@Franosch.org), <http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T35/>.