Physik Department
TU München
Theoretische Physik

SoSe 2005
Übungsblatt 5
10.6.2005

Übung zur theoretischen Physik neuronaler Informationsverarbeitung
(Prof. J. L. van Hemmen)

Aufgabe 1: Eigenschaften der Fundamentallösung der Kabelgleichung

Die Fundamentallösung der Kabelgleichung lautet

$$V_f(x,t) = \frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\pi t/\tau}\lambda\tau} \exp\left[-t/\tau - \frac{(x/\lambda)^2}{4t/\tau}\right] . \tag{1}$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fundamentallösung:

1. Die Gesamtladung fällt exponentiell ab.
2. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Maximums, d.i. der betrachtete Ort geteilt durch die Zeit, bis hier die Spannung ihr Maximum erreicht, ist $2\lambda/\tau$ für Zeitpunkte $t \gg \tau$.
3. $\lim_{t\to 0+} V_f(x,t) = \frac{1}{\tau}\delta(x)$

Aufgabe 2: FitzHugh-Nagumo-Modell

Das FitzHugh-Nagumo-Modell ist gegenüber dem Hodgkin-Huxley-Modell eine wesentliche Vereinfachung, zeigt aber, abgesehen von chaotischen Lösungen, ein qualitativ ähnliches Verhalten. In diesem (dimensionslosen) 2-Variablen-Modell spielt u die Rolle des Membranpotentials, v beschreibt den Einfluss der Ionenkanäle. Die Dynamik ist

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u(a-u)(u-1) - v + I =: \mathrm{f}(u,v) \ , \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = bu - \gamma v =: \mathrm{g}(u,v) \ , \tag{2}$$

mit den Parametern $0 < b, \gamma$ sowie $b, \gamma \ll a < 1$. Die Größe I beschreibt einen zugeführten Strom.

1. Klassifizieren Sie alle auftretenden Fixpunkte nach Stabilität und Instabilität. Unterscheiden Sie dabei insbesondere verschiedene Bereiche des Inputstromes $0 < I = \text{const.}$, sowie der Systemparameter b und γ.
   Hinweis: Es erspart Rechenaufwand, die Klassifikation qualitativ unter Anschauung der beiden Null-Isoklinen $\mathrm{f}(u,v) = 0$ und $\mathrm{g}(u,v) = 0$ vorzunehmen.
2. Zeigen Sie, dass im Fall genau eines Fixpunkts dieser entweder stabil ist oder ein Grenzzyklus auftritt. Skizzieren Sie im Falle des Grenzzyklus Trajektorien mit verschiedenen Anfangsbedingungen.
   Hinweis: Der Nachweis eines Grenzzyklus gelingt z.B. dadurch, dass man zeigt:

(a) Es gibt ein endliches Gebiet im Phasenraum, aus dem Trajektorien nicht ausbrechen können.

(b) In diesem Gebiet befindet sich genau ein Fixpunkt, welcher ein instabiler Knoten oder eine instabile Spirale ist.

3. Der Neuronen-Zustand befinde sich für Zeiten $t < 0$ am einzigen Fixpunkt $(u, v) = (0, 0)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde ein kurzer Strompuls der Stärke α gegeben, $I(t) = \alpha\,\delta(t)$. Skizzieren Sie Trajektorien für verschiedene $\alpha > 0$. Gibt es eine Schwelle für die Spike-Auslösung in diesem Modell?

Besprechung der Übungen am Freitag, den 24.6.2005 um 9.15 Uhr im Seminarraum 3024 von E22 (Garching).

Übungsleitung:
Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T35/.