

Übung zur theoretischen Physik neuronaler Informationsverarbeitung (Prof. J. L. van Hemmen)

Aufgabe 1: Eigenschaften der Fundamentallösung der Kabelgleichung

Die Fundamentallösung der Kabelgleichung lautet

$$V_f(x, t) = \frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\pi t/\tau\lambda\tau}} \exp\left[-t/\tau - \frac{(x/\lambda)^2}{4t/\tau}\right]. \quad (1)$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fundamentallösung:

1. Die Gesamtladung fällt exponentiell ab.
2. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Maximums, d.i. der betrachtete Ort geteilt durch die Zeit, bis hier die Spannung ihr Maximum erreicht, ist $2\lambda/\tau$ für Zeitpunkte $t \gg \tau$.
3. $\lim_{t \rightarrow 0^+} V_f(x, t) = \frac{1}{\tau}\delta(x)$

Aufgabe 2: FitzHugh-Nagumo-Modell

Das FitzHugh-Nagumo-Modell ist gegenüber dem Hodgkin-Huxley-Modell eine wesentliche Vereinfachung, zeigt aber, abgesehen von chaotischen Lösungen, ein qualitativ ähnliches Verhalten. In diesem (dimensionslosen) 2-Variablen-Modell spielt u die Rolle des Membranpotentials, v beschreibt den Einfluss der Ionenkanäle. Die Dynamik ist

$$\frac{du}{dt} = u(a - u)(u - 1) - v + I =: f(u, v), \quad \frac{dv}{dt} = bu - \gamma v =: g(u, v), \quad (2)$$

mit den Parametern $0 < b, \gamma$ sowie $b, \gamma \ll a < 1$. Die Größe I beschreibt einen zugeführten Strom.

1. Klassifizieren Sie alle auftretenden Fixpunkte nach Stabilität und Instabilität. Unterscheiden Sie dabei insbesondere verschiedene Bereiche des Inputstromes $0 < I = \text{const.}$, sowie der Systemparameter b und γ .
Hinweis: Es erspart Rechenaufwand, die Klassifikation qualitativ unter Anschauung der beiden Null-Isoklinen $f(u, v) = 0$ und $g(u, v) = 0$ vorzunehmen.
2. Zeigen Sie, dass im Fall genau eines Fixpunkts dieser entweder stabil ist oder ein Grenzzyklus auftritt. Skizzieren Sie im Falle des Grenzzyklus Trajektorien mit verschiedenen Anfangsbedingungen.
Hinweis: Der Nachweis eines Grenzzyklus gelingt z.B. dadurch, dass man zeigt:

- (a) Es gibt ein endliches Gebiet im Phasenraum, aus dem Trajektorien nicht ausbrechen können.
 - (b) In diesem Gebiet befindet sich genau ein Fixpunkt, welcher ein instabiler Knoten oder eine instabile Spirale ist.
3. Der Neuronen-Zustand befinde sich für Zeiten $t < 0$ am einzigen Fixpunkt $(u, v) = (0, 0)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde ein kurzer Strompuls der Stärke α gegeben, $I(t) = \alpha \delta(t)$. Skizzieren Sie Trajektorien für verschiedene $\alpha > 0$. Gibt es eine Schwelle für die Spike-Auslösung in diesem Modell?

Besprechung der Übungen am Freitag, den 24.6.2005 um 9.15 Uhr im Seminarraum 3024 von E22 (Garching).

Übungsleitung:

Moritz Franosch, mail@Franosch.org, <http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T35/>.