Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

25. **Schwingende Platte**

Eine sehr große ebene Platte bewege sich mit Amplitude a in ihrer eigenen Ebene harmonisch mit Kreisfrequenz ω in einem inkompressiblen Newton'schen Fluid (kinematische Viskosität ν) hin und her. Welche Strömungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ bildet sich im Fluid aus? Die Platte befinde sich in der x, y-Ebene und bewege sich parallel zur x-Achse. Vernachlässigen Sie die Schwerkraft.

26. **Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten**

Schreiben Sie die Navier-Stokes-Gleichungen für eine inkompressible Flüssigkeit

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \boldsymbol{v} &= 0 \\ \partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v} \circ \nabla)\boldsymbol{v} &= \boldsymbol{f} - \frac{1}{\varrho}\nabla p + \nu \Delta \boldsymbol{v} \end{aligned}$$

in Zylinderkoordinaten $\boldsymbol{v}(r, \varphi, h) = (v^r, v^\varphi, v^h)$, $\boldsymbol{f}(r, \varphi, h) = (f^r, f^\varphi, f^h)$, $\varrho(r, \varphi, h)$, $p(r, \varphi, h)$ (vgl. Aufgabe 27).
Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung des Vektor-Laplace-Operators $\Delta \boldsymbol{v}$ in Zylinderkoordinaten ein Computeralgebra-Programm oder geben Sie nur einen Ansatz zur Berechnung an.

Ergebnis:

$$\frac{1}{r}v^r + \partial_r v^r + \partial_\varphi v^\varphi + \partial_h v^h = 0$$

$$\partial_t \begin{pmatrix} v^r \\ v^\varphi \\ v^h \end{pmatrix} + (v^r\partial_r + v^\varphi\partial_\varphi + v^h\partial_h) \begin{pmatrix} v^r \\ v^\varphi \\ v^h \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -r(v^\varphi)^2 \\ \frac{2}{r}v^r v^\varphi \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} f^r \\ f^\varphi \\ f^h \end{pmatrix} + \frac{1}{\varrho} \begin{pmatrix} \partial_r p \\ \frac{1}{r^2}\partial_\varphi p \\ \partial_h p \end{pmatrix} + \nu \begin{pmatrix} \frac{1}{r}\partial_r v^r + \partial_r^2 v^r - \frac{1}{r^2}v^r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v^r - \frac{2}{r}\partial_\varphi v^\varphi + \partial_h^2 v^r \\ \frac{3}{r}\partial_r v^\varphi + \partial_r^2 v^\varphi + \frac{2}{r^3}\partial_\varphi v^r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v^\varphi + \partial_h^2 v^\varphi \\ \frac{1}{r}\partial_r v^h + \partial_r^2 v^h + \partial_h^2 v^h + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v^h \end{pmatrix}$$