

## Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

### 22. Differentiation von Linien-, Oberflächen-, und Volumenintegralen über mitbewegte Integrationsbereiche

Seien  $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$  ein Vektorfeld,  $f(\mathbf{x}, t)$  ein skalares Feld,  $C$  eine Kurve,  $W$  ein Volumen und  $C_t$  bzw.  $W_t$  deren zeitliche Entwicklung unter der Abbildung  $\varphi_t(\mathbf{x})$  mit  $\frac{d}{dt}\varphi_t(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ .

1. Zeigen Sie, dass zur Zeit  $t = 0$  gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{C_t} \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} = \int_C D_t \mathbf{u} \cdot d\mathbf{s} + \int_C \mathbf{u} \cdot \partial \mathbf{v} d\mathbf{s}. \quad (1)$$

2. Begründen Sie die symbolische Schreibweise

$$D_t d\mathbf{s} = \partial \mathbf{v} d\mathbf{s}. \quad (2)$$

Was bedeutet  $D_t d\mathbf{s}$  anschaulich?

3. Wiederholen Sie aus der Vorlesung, dass zur Zeit  $t = 0$  gilt

$$\frac{d}{dt} \int_{W_t} f(\mathbf{x}, t) dV = \int_W (D_t f + f \operatorname{div} \mathbf{v}) dV. \quad (3)$$

4. Begründen Sie die symbolische Schreibweise

$$D_t dV = \operatorname{div} \mathbf{v} dV. \quad (4)$$

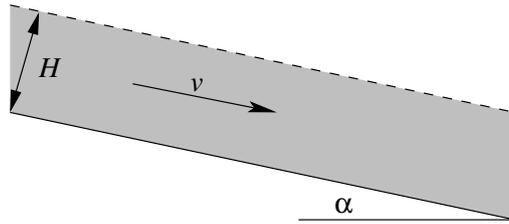
Was bedeutet  $D_t dV$  anschaulich?

5. Zeigen Sie, dass für die materielle Ableitung des Oberflächenelements gilt

$$D_t d\mathbf{A} = \operatorname{div} \mathbf{v} d\mathbf{A} - (\partial \mathbf{v})^T d\mathbf{A}. \quad (5)$$

Hinweis: Beachten Sie, dass  $D_t dV = D_t((\mathbf{s}_1 \times \mathbf{s}_2) \cdot d\mathbf{s}) = D_t(d\mathbf{A} \cdot d\mathbf{s})$  und bearbeiten Sie die rechte Seite mit den obigen Formeln.

### 23. Flachwasserströmung



1. Berechnen Sie die Geschwindigkeits- und Druckverteilung der stationären Strömung, die sich längs einer schiefen Ebene aufgrund der Schwerkraft ausbildet. Die Höhe der Strömung senkrecht zur Platte sei  $H$ , der Neigungswinkel  $\alpha$ .
2. Welche Kraft wirkt die Wand auf das Fluid aus?
3. Der Volumendurchsatz pro Breite der Strömung sei  $\dot{V}/b$ . Berechnen Sie hieraus die Höhe  $H$  der Strömung.