Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

9. **Produktregeln**

Zeigen Sie für die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ und die Vektorfelder $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$
\begin{aligned}
\nabla(fg) &= f(\nabla g) + g(\nabla f) && (1)\\
\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} && (2)\\
\nabla\cdot(f\boldsymbol{a}) &= f(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) + \boldsymbol{a}\cdot(\nabla f) && (3)\\
\nabla\cdot(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= \boldsymbol{b}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a}) - \boldsymbol{a}\cdot(\nabla\times\boldsymbol{b}) && (4)\\
\nabla\times(f\boldsymbol{a}) &= f(\nabla\times\boldsymbol{a}) + (\nabla f)\times\boldsymbol{a} && (5)\\
\nabla\times(\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b}) &= (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a} - (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}(\nabla\cdot\boldsymbol{b}) - \boldsymbol{b}(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) && (6)
\end{aligned}
$$

Hinweis: Verwenden Sie den ε-Tensor mit

$$
\varepsilon_{ijk} = \begin{cases} 1 & \text{für gerade Permutationen } (i,j,k) \in \{1,2,3\}^3 \\ -1 & \text{für ungerade Permutationen} \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}
$$

und zeigen Sie zunächst die Identität

$$
\sum_k \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}\,.
$$

10. **Zweite Ableitungen**

$$
\begin{aligned}
\nabla\cdot(\nabla\times\boldsymbol{a}) &= 0 && (7)\\
\nabla\times(\nabla f) &= 0 && (8)\\
\nabla\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) &= \nabla(\nabla\cdot\boldsymbol{a}) - \nabla^2\boldsymbol{a} && (9)
\end{aligned}
$$

Bitte wenden.

11. **Schallwellen**

1. Linearisieren Sie die Eulergleichungen

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \operatorname{div}(\varrho\,\boldsymbol{v}) &= 0 \\ \partial_t \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{v}\cdot\nabla)\boldsymbol{v} &= -\frac{1}{\varrho}\nabla p\,, \end{aligned}$$

   um $\varrho = \varrho_0$, $p = p_0$ und $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{0}$, indem Sie $\varrho = \varrho_0 + \delta\varrho$, und $p = p_0 + \delta p$ setzen und Terme zweiter Ordnung in $\delta\varrho$, δp und $\boldsymbol{v}$ vernachlässigen. Terme zweiter Ordnung in den entsprechenden Zeit- und Ortsableitungen dürfen auch vernachlässigt werden (warum?). Beachten Sie, dass für Schallwellen in Gasen die adiabatische Zustandsgleichung

$$\frac{p}{p_0} = \left(\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)^{\gamma}$$

   gilt und für Flüssigkeiten und Festkörper

$$\varrho = \varrho_0(1 + \varkappa\,\delta p)\,.$$

2. Wie erhält man eine Wellengleichung für $\delta\varrho$?
3. Berechnen Sie die Schallgeschwindigkeit in Luft und in Wasser (die Kompressibilität von Wasser beträgt $\varkappa = 50 \cdot 10^{-6}\text{bar}^{-1}$).