Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

6. **Verzerrungstensor**

Man betrachte einen achsparallelen Quader mit kleinen Kantenlängen (l_1, l_2, l_3), der von den Vektoren $(l_1\mathbf{e}_1, l_2\mathbf{e}_2, l_3\mathbf{e}_3)$ aufgespannt wird. Dieser erfahre eine durch das Vektorfeld

$$\mathbf{u} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}t$$

gegebene kleine Verrückung. Größen zweiter Ordnung in $\mathrm{d}t$ sind im Folgenden zu vernachlässigen.

1. Sei $\mathbf{r}$ ein Punkt im Quader vor der Verrückung und $\mathbf{r}'$ der entsprechende Punkt nach der Verrückung. Der Quader wird durch $\mathbf{u}$ transliert, gedreht und verzerrt. Man mache sich klar, dass in einem mit dem Quader mittranslierten und mitgedrehten Koordinatentensystem gilt
$$\mathbf{r}' \approx \mathbf{r} + D\mathbf{r}\,,$$
wobei
$$D = (d_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$
der Verzerrungstensor ist.

2. Zeigen Sie, dass für die relative Längenänderung einer Kante $\mathbf{r}_i = l_i\mathbf{e}_i$ des Quaders gilt
$$\frac{|\mathbf{r}_i'| - |\mathbf{r}_i|}{|\mathbf{r}_i|} \approx d_{ii}\,.$$

3. Die Kanten $\mathbf{r}_i$ und $\mathbf{r}_j$ des Quaders schließen vor der Deformation einen Winkel $\pi/2$ ein, nach der (kleinen) Deformation sei der Winkel $\pi/2 - \delta_{ij}$. Zeigen Sie, dass gilt
$$\sin\delta_{ij} \approx 2d_{ij}\,.$$

4. Zeigen Sie durch Berechnung der Determinante von $D + \mathbb{1}$, dass für das Volumen $V' = \mathbf{r}_1' \circ (\mathbf{r}_2' \times \mathbf{r}_3')$ des verzerrten Quaders gilt
$$\frac{V' - V}{V} = \sum_{i=1}^{3} d_{ii}\,.$$

Bitte wenden.

7. **Totale Ableitung**

Beweisen Sie für die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}; (x, y, z, t) \mapsto f(x, y, z, t)$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften der totalen Ableitung D_t:

1. Additivität
$$\mathrm{D}_t(f+g) = \mathrm{D}_t f + \mathrm{D}_t g$$

2. Homogenität
$$\mathrm{D}_t(\lambda f) = \lambda\, \mathrm{D}_t f$$

3. Produktregel
$$\mathrm{D}_t(f \cdot g) = f\, \mathrm{D}_t g + g\, \mathrm{D}_t f$$

4. Kettenregel
$$\mathrm{D}_t(h \circ f) = (h' \circ f)\, \mathrm{D}_t f$$

8. **Koordinatentransformationen**

Ein Diffeomorphismus $x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$x : \boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_1(q_1, q_2, q_3) \\ x_2(q_1, q_2, q_3) \\ x_3(q_1, q_2, q_3) \end{pmatrix}$$

heißt Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$.

1. Zeigen Sie, dass für die Jacobi-Matrizen $\partial x(\boldsymbol{q})$ der Abbildung x und deren Umkehrabbildung q gilt
$$\partial x(\boldsymbol{q}) = [\partial q(\boldsymbol{x})]^{-1}$$

2. Zeigen Sie, dass $(\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial x}{\partial q_2}, \frac{\partial x}{\partial q_3})$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

3. Betrachten Sie die Komponenten v^j des Vektorfeldes $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ bezüglich der neuen Basis $(\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial x}{\partial q_2}, \frac{\partial x}{\partial q_3})$. Die v^j sind eindeutig festgelegt durch die Basisdarstellung
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \sum_j v^j(\boldsymbol{x})\, \frac{\partial x}{\partial q_j}\,.$$

   Berechnen Sie das Verhalten der v^j unter einer Koordinatentransformation $(q_1, q_2, q_3) \mapsto (q_1', q_2', q_3')$.