Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

27. Spannungstensor in allgemeinen Koordinaten und in Zylinderkoordinaten

1. Die Kraft auf ein Fluid pro Oberflächeneinheit mit Normalenvektor $\boldsymbol{n}$ ist bei einem inkompressiblen Newton'schen Fluid $\pi\boldsymbol{n}$ ist, wobei für den Spannungstensor

$$\pi_{ij} = -p\,\delta_{ij} + \eta\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)$$

gilt.

Zeigen Sie, dass sich für den Spannungstensor π in den q-Koordinaten von Aufgabe 27 ergibt:

$$\pi^q_{ij} = -p\,\mathbb{1} + \eta\left[\partial q\left[(\boldsymbol{v}^q \circ \nabla^q)\,\partial x\right] + \left(\frac{\partial v^i}{\partial q_j}\right)_{ij} + g^{-1}\left[(\boldsymbol{v}^q \circ \nabla^q)\partial x\right]^T \partial x + g^{-1}\left(\frac{\partial v^i}{\partial q_j}\right)_{ji} g\right]$$

2. Geben Sie einen Ansatz zur Berechnung des Spannungstensors in Zylinderkoordinaten an.

Der Spannungtensor in Zylinderkoordinaten lautet

$$\pi = \begin{pmatrix} -p + \eta 2\partial_r v^r & \eta(\partial_\varphi v^r + r^2 \partial_r v^\varphi) & \eta(\partial_h v^r + \partial_r v^h) \\ \eta(\partial_r v^\varphi + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi v^r) & -p + \eta(2\partial_\varphi v^\varphi + \frac{2}{r} v^r) & \eta(\partial_h v^\varphi + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi v^h \\ \eta(\partial_r v^h + \partial_h v^r) & \eta(\partial_\varphi v^h + r^2 \partial_h v^\varphi) & -p\eta 2\partial_h v^h \end{pmatrix}$$

28. **Couette-Strömung**

Zwischen einem sehr langen Kreiszylinder mit Radius R_1 und einem hohlen, koaxialen Zylinder mit Innenradius R_2 befindet sich eine viskose Newton'sche Flüssigkeit. Der innere Zylinder rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1, der äußere mit ω_2. Die sich ausbildene Strömung heißt Couette-Strömung.

Hinweis: Verwenden Sie die Navier-Stokes-Gleichung und den Spannungstensor in Zylinderkoordinaten von den vorhergehenden Aufgaben. Die Zylinderkoordinaten der vorhergehenden Aufgaben sind *nicht normierte* Zylinderkoordinaten, zur Berechnung von Beträgen ist also die Formel $||\boldsymbol{f}|| = \boldsymbol{f}^T g \boldsymbol{f}$ zu verwenden.

1. Berechnen Sie den Geschwindigkeitsverlauf der stationären Strömung. Die Volumenkräfte seien vernachlässigbar.
2. Was ergibt sich für $R_1 = 0$?
3. Was ergibt sich für $\omega_2 = 0$ und $R_2 \to \infty$?
4. Zur Messung der Zähigkeit einer Flüssigkeit kann man das Couette-Viskosimeter verwenden: Der innere Zylinder hängt an einem Torsionsfaden und ruht im stationären Fall, der äußere bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Anhand der Verdrillung des Torsionsfadens wird das auf den inneren Zylinder wirkende Drehmoment M gemessen. Berechnen Sie hieraus die Zähigkeit.