

Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

1. Kreuzprodukt

Zeigen Sie dass es zu jedem $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ eine eindeutige antisymmetrische Matrix Ω gibt, für die für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\Omega \mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

2. Drehung

Sei Ω eine antisymmetrische 3×3 Matrix und $\varepsilon > 0$ klein.

(i) Interpretieren Sie geometrisch die Abbildung

$$D(\varepsilon) \mathbf{v} = (\mathbb{1} + \varepsilon \Omega) \mathbf{v} .$$

Benutzen Sie dazu die Darstellung von Ω aus Aufgabe 1 und rechnen Sie in einem Koordinatensystem, in dem gilt $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 1)^T$.

(ii) Berechnen Sie die n-te Iteration $D(\varepsilon)^n \mathbf{v}$.

(iii) Berechnen und interpretieren Sie $\lim_{n \rightarrow \infty} D(\varphi/n)^n$.

3. Gradient in gedrehten Koordinaten

Gegeben seien zwei gegeneinander verdrehte Koordinatensysteme (ungestrichene und gestrichene Koordinaten), also

$$\mathbf{x}' = O \mathbf{x} ,$$

wobei O eine orthogonale Matrix ist. Zeigen Sie dass für die Ableitung nach gestrichenen Koordinaten

$$\nabla' = \begin{pmatrix} \partial x' \\ \partial y' \\ \partial z' \end{pmatrix}$$

gilt

$$\nabla' = O \nabla .$$

4. Ableitungen eines Vektorfelds

Zeigen Sie, dass die Ableitung $\nabla_i u_j = \frac{\partial u_j(x_1, x_2, x_3)}{\partial x_i}$ des Vektorfelds $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ein Tensor ist. Hinweis: Benutzen Sie das Resultat aus Aufgabe 3.

5. Gauß'scher Integralsatz

Beweisen Sie den Gauß'schen Integralsatz für

1. den Spezialfall des Geschwindigkeitsfelds in einer zylindrischen Röhre (Achse ist die x -Achse), die von einer Flüssigkeit mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(x, y, z) = (v(x), 0, 0)$ durchströmt wird. Das Integrationsvolumen sei der Zylinder.

Warum ist bei einer *inkompressiblen* Flüssigkeit in obigem Spezialfall $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$?

Warum gilt für die Dichte ρ einer *kompressiblen* Flüssigkeit in obigem Spezialfall

$$\frac{\partial \rho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} [\rho(\mathbf{x}, t) \mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]?$$

2. ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ und einen achsparallelen Quader als Integrationsvolumen.