Technische Universität München
Theoretische Physik

Theoretische Biophysik I

Prof. J. L. van Hemmen

8. **Delay-Differenzialgleichungen**

Die Walfangkommission will das Verhalten der Wahlpopulation vorhersagen. Dazu benutzt sie folgende Differenzialgleichung:

$$\frac{d}{dt}x(t) = -x(t) + x(t-T)g(x(t-T)) \tag{1}$$

mit der Vermehrungsrate

$$g(y) = 1 + q\left[1 - \left(\frac{y}{k}\right)^z\right], \tag{2}$$

wobei q, z, k Konstanten, $x(t) > 0$ und T die Zeitverzögerung ist. Das Ziel ist, eine stabile Population zu gewährleisten. Sie sollen daher untersuchen, ob Oszillationen auftreten können.

1. Machen Sie das Modell plausibel. Zeigen Sie dazu, dass eine Erhöhung der Sterberate aufgrund von Walfang (ersetze $1 \to 1 + \varrho$) wegnormiert werden kann, wenn dazu die anderen Konstanten geändert werden.
2. Bestimmen Sie die beiden Fixpunkte in (1).
3. Linearisieren Sie um den positiven Fixpunkt, um dessen Stabilität zu untersuchen.
4. Machen Sie den üblichen Exponential-Ansatz für lineare Systeme. Er liefert $\lambda = -1 - b\exp(-\lambda T)$.
5. Gibt es rein reelle Lösungen für λ?
6. In welchem Bereich sind die Lösungen stabil? Zeigen Sie, dass für $T > T_c$ spontane Oszillationen auftreten, wobei

$$T_c = \frac{\pi - \arccos(1/b)}{\sqrt{b^2 - 1}}. \tag{3}$$

   Zeigen Sie, dass die Oszillationsperiode in der Umgebung $T \approx T_c$ näherungsweise $2\pi/\sqrt{b^2-1}$ beträgt. Hierbei ergibt sich T_c aus der Bedingung „Realteil von λ gleich 0.“.
7. Interpretieren Sie Ihre Ergebnisse. Welche Empfehlung könnte die Walfangkommission aussprechen?