Theoretische Biophysik I

Prof. J. L. van Hemmen

3. **Populationsmodelle mit Altersverteilung**

Sei $n(t, a)$ die Populations*dichte* bezüglich des Alters in Abhängigkeit der Zeit t, d.h. die Zahl der Individuen pro Altersintervall zum Zeitpunkt t.

(a) Falls $\mu(a)$ die altersabhängige Sterberate ist, dann gilt

$$\frac{\partial n(t,a)}{\partial t} + \frac{\partial n(t,a)}{\partial a} = -\mu(a) n(t,a)\,. \tag{1}$$

Warum?

(b) Leiten Sie für $t < a$ bei gegebener Anfangsverteilung $n(0, a)$ die zeitliche Entwicklung der Populationsdichte

$$n(t,a) = n(0, a-t) \exp\left(- \int_{a-t}^{a} \mu(s)\,\mathrm{d}s \right) \tag{2}$$

her.

(c) Wir nehmen an, dass altersabhängig Kinder geboren werden mit einer Rate $b(a)$, also

$$n(t,0) = \int_0^\infty n(t,a) b(a)\,\mathrm{d}a\,. \tag{3}$$

Wie entwickelt sich dann die Population, diesmal für beliebige $t > 0$ und $a > 0$?

(d) Wir betrachten nun den Spezialfall eines Erneuerungsprozesses (*renewal process*): Bei Ableben eines Individuums wird dieses Individuum im selben Moment durch ein neues mit Alter 0 ersetzt (*reset or renewal to age 0*). Zeigen Sie, dass dann wie erwartet die Größe der Gesamtpopulation $n(t) = \int_0^\infty n(t,a)\,\mathrm{d}a$ konstant bleibt. Zeigen Sie außerdem, dass für große Zeiten für die Dichte der Neugeborenen $g(t) := n(t, 0)$ gilt:

$$g(t) = \int_0^\infty \mu(a) \exp\left(- \int_0^a \mu(s)\mathrm{d}s \right) g(t-a)\,\mathrm{d}a\,. \tag{4}$$

Besprechung der Übungen am Donnerstag 20.11.2008 um 8.30 Uhr im Raum PH 227.
Übungsleitung: Dr. Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.t35.ph.tum.de.