Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

9. **Verzerrungstensor**

Man betrachte einen achsparallelen Quader mit kleinen Kantenlängen (l_1, l_2, l_3), der von den Vektoren $(l_1\mathbf{e}_1, l_2\mathbf{e}_2, l_3\mathbf{e}_3)$ aufgespannt wird. Dieser erfahre eine durch das Vektorfeld

$$\mathbf{u} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x})\,\mathrm{d}t$$

gegebene kleine Verrückung. Größen zweiter Ordnung in $\mathrm{d}t$ sind im Folgenden zu vernachlässigen.

1. Sei $\mathbf{r}$ ein Punkt im Quader vor der Verrückung und $\mathbf{r}'$ der entsprechende Punkt nach der Verrückung. Der Quader wird durch $\mathbf{u}$ transliert, gedreht und verzerrt. Man mache sich klar, dass in einem mit dem Quader mittranslierten und mitgedrehten Koordinatentensystem gilt
$$\mathbf{r}' \approx \mathbf{r} + D\mathbf{r}\,,$$
wobei
$$D = (d_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i}\right)$$
der Verzerrungstensor ist.

2. Zeigen Sie, dass für die relative Längenänderung einer Kante $\mathbf{r}_i = l_i\mathbf{e}_i$ des Quaders gilt
$$\frac{|\mathbf{r}_i'| - |\mathbf{r}_i|}{|\mathbf{r}_i|} \approx d_{ii}\,.$$

3. Die Kanten $\mathbf{r}_i$ und $\mathbf{r}_j$ des Quaders schließen vor der Deformation einen Winkel $\pi/2$ ein, nach der (kleinen) Deformation sei der Winkel $\pi/2 - \delta_{ij}$. Zeigen Sie, dass gilt
$$\sin\delta_{ij} \approx 2d_{ij}\,.$$

4. Zeigen Sie durch Berechnung der Determinante von $D + \mathbb{1}$, dass für das Volumen $V' = \mathbf{r}_1' \circ (\mathbf{r}_2' \times \mathbf{r}_3')$ des verzerrten Quaders gilt
$$\frac{V' - V}{V} = \sum_{i=1}^{3} d_{ii}\,.$$

10. **Totale Ableitung**

Beweisen Sie für die Funktionen $f, g : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}; (x, y, z, t) \mapsto f(x, y, z, t)$, $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $\lambda \in \mathbb{R}$ folgende Eigenschaften der totalen Ableitung D_t:

1. Additivität
$$\mathrm{D}_t(f + g) = \mathrm{D}_t f + \mathrm{D}_t g$$

2. Homogenität
$$\mathrm{D}_t(\lambda f) = \lambda\, \mathrm{D}_t f$$

3. Produktregel
$$\mathrm{D}_t(f \cdot g) = f\, \mathrm{D}_t g + g\, \mathrm{D}_t f$$

4. Kettenregel
$$\mathrm{D}_t(h \circ f) = (h' \circ f)\, \mathrm{D}_t f$$

Besprechung der Übungen am Montag 12.11.2007 um 8.30 Uhr im Raum PH 3343, um 14.15 Uhr im Raum PH 127 und am Dienstag 13.11.2007 um 9.30 Uhr in HS3.

Übungsleitung: Dr. Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.t35.physik.tu-muenchen.de.