Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

6. **Gauß'scher Integralsatz**

Beweisen Sie den Gauß'schen Integralsatz für

1. den Spezialfall des Geschwindigkeitsfelds in einer zylindrischen Röhre (Achse ist die x-Achse), die von einer Flüssigkeit mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(x, y, z) = (v(x), 0, 0)$ durchstömt wird. Das Integrationsvolumen sei der Zylinder.

   Warum ist bei einer *inkompressiblen* Flüssigkeit in obigem Spezialfall $\operatorname{div} \mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$?

   Warum gilt für die Dichte ϱ einer *kompressiblen* Flüssigkeit in obigem Spezialfall

$$\frac{\partial \varrho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\operatorname{div} \left[\varrho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)\right] ?$$

2. ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ und einen achsparallelen Quader als Integrationsvolumen.

7. **Rotierende Flüssigkeit**

Das (zeitlich konstante) Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ einer Flüssigkeit sei, mit $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$,

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x} \,.$$

1. Zeigen Sie, dass für Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b})\boldsymbol{c} \,.$$

2. Berechnen Sie

$$\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \nabla \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) \,,$$

   indem Sie die Formel von 1. verwenden.

3. Berechnen Sie $\operatorname{rot} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ für den Spezialfall $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_3)$ direkt durch Differenzieren. Wie lässt sich das Ergebnis auf $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ verallgemeinern?

4. Berechnen Sie $\operatorname{div} \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$.

5. Berechnen Sie den Verzerrungstensor

$$D = (d_{ij}) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right) \,.$$

8. **Koordinatentransformationen**

Ein Diffeomorphismus $x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$x : \boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_1(q_1, q_2, q_3) \\ x_2(q_1, q_2, q_3) \\ x_3(q_1, q_2, q_3) \end{pmatrix}$$

heißt Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$.

1. Zeigen Sie, dass für die Jacobi-Matrizen $\partial x(\boldsymbol{q})$ der Abbildung x und deren Umkehrabbildung q gilt
$$\partial x(\boldsymbol{q}) = [\partial q(\boldsymbol{x})]^{-1}$$
2. Zeigen Sie, dass $(\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial x}{\partial q_2}, \frac{\partial x}{\partial q_3})$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.
3. Betrachten Sie die Komponenten v^j des Vektorfeldes $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ bezüglich der neuen Basis $(\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial x}{\partial q_2}, \frac{\partial x}{\partial q_3})$. Die v^j sind eindeutig festgelegt durch die Basisdarstellung
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \sum_j v^j(\boldsymbol{x}) \, \frac{\partial x}{\partial q_j} \, .$$
Berechnen Sie das Verhalten der v^j unter einer Koordinatentransformation $(q_1, q_2, q_3) \mapsto (q'_1, q'_2, q'_3)$.

Übungsleitung: Dr. Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.t35.physik.tu-muenchen.de.