Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

34. **Bewegte Kugel**

In einer reibungsfreien, inkompressiblen Flüssigkeit bewegt sich eine Kugel (Radius a) mit Geschwindigkeit $\boldsymbol{w}$. Der Mittelpunkt der Kugel sei gerade am Ursprung. Prüfen Sie nach, dass sich im stationären Fall in der Flüssigkeit ein Geschwindigkeitsfeld

$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{r}) = -\mathrm{grad}\,\Phi(\boldsymbol{r})\,, \tag{1}$$

ausbildet, wobei

$$\Phi(\boldsymbol{r}) = \frac{a^3}{2|\boldsymbol{r}|^3}\boldsymbol{w}\cdot\boldsymbol{r}\,. \tag{2}$$

Hinweise: Berücksichtigen Sie dabei auch, dass eine Lösung für den Druck existieren muss. Es ist

$$\nabla(\boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b}) = \boldsymbol{a}\times(\nabla\times\boldsymbol{b}) + \boldsymbol{b}\times(\nabla\times\boldsymbol{a}) + (\boldsymbol{a}\cdot\nabla)\boldsymbol{b} + (\boldsymbol{b}\cdot\nabla)\boldsymbol{a}\,. \tag{3}$$

35. **Visco-Kupplung**

Zwei parallele Kreisscheiben (Radius R) mit kollinearen Achsen befinden sich im Abstand d ($d \ll R$). Dazwischen ist ein viskoses inkompressibles Fluid. Die eine Scheibe rotiert mit Winkelgeschwindigkeit ω, die andere ruht.

1. Berechnen Sie das stationäre Geschwindigkeitsfeld im Fluid (ohne Gravitation und unter Vernachlässigung von Randeffekten an den Rändern der Scheiben).
2. Welches Drehmoment wird auf die rotierende Scheibe ausgeübt?

Hinweis (Herleitung ist nicht verlangt): Die Navier-Stokes-Gleichungen in (normierten) Zylinderkoordinaten (r,φ,h) (Geschwindigkeitsfeld $\boldsymbol{v}$, Volumenkräfte $\boldsymbol{g}$, Druck p, kinematische Viskosität ν) lauten

$$\partial_t\boldsymbol{v} + \left(v_r\partial_r + \frac{v_\varphi}{r}\partial_\varphi + v_z\partial_z\right)\begin{pmatrix} v_r \\ v_\varphi \\ v_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{v_\varphi^2}{r} \\ \frac{v_r v_\varphi}{r} \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \boldsymbol{g} - \frac{1}{\varrho}\begin{pmatrix} \partial_r \\ \frac{1}{r}\partial_\varphi \\ \partial_h \end{pmatrix} p + \nu\begin{pmatrix} \partial_r^2 v_r + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v_r + \partial_h^2 v_r + \frac{1}{r}\partial_r v_r - \frac{2}{r^2}\partial_\varphi v_\varphi - \frac{v_r}{r^2} \\ \partial_r^2 v_\varphi + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v_\varphi + \partial_h^2 v_\varphi + \frac{1}{r}\partial_r v_\varphi + \frac{2}{r^2}\partial_\varphi v_r - \frac{v_\varphi}{r^2} \\ \partial_r^2 v_h + \frac{1}{r^2}\partial_\varphi^2 v_h + \partial_h^2 v_h + \frac{1}{r}\partial_r v_h \end{pmatrix}, \tag{4}$$

die Divergenz lautet

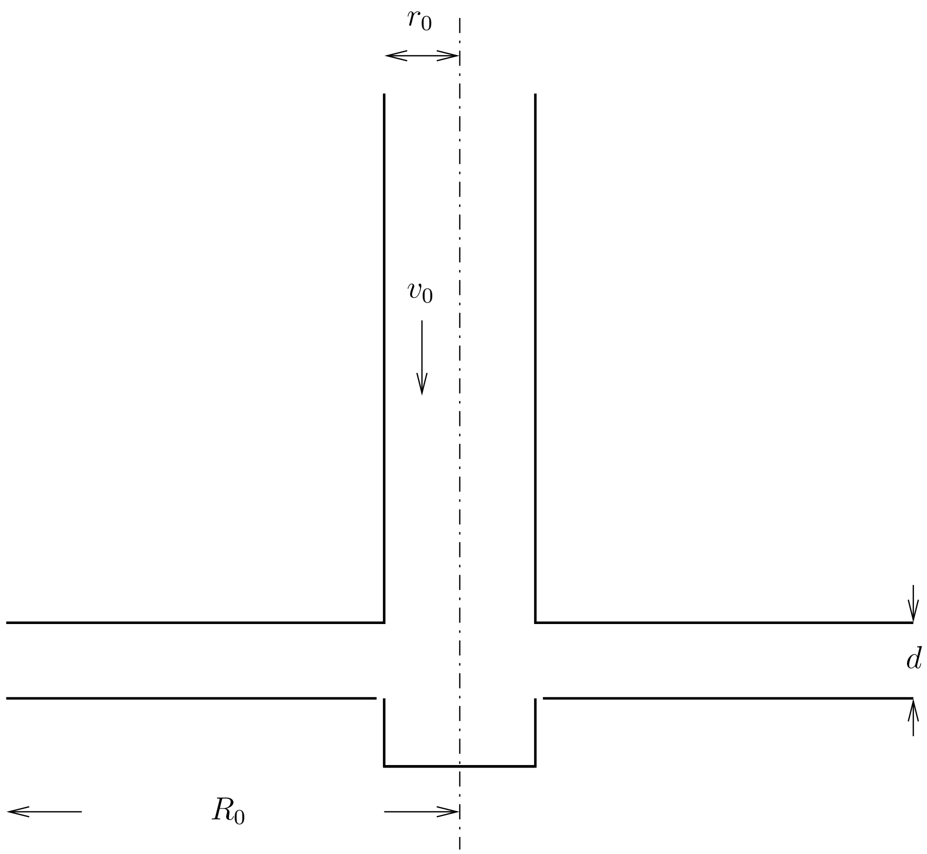
$$\partial_r v_r + \frac{1}{r}v_r + \frac{1}{r}\partial_\varphi v_\varphi + \partial_z v_z\,, \tag{5}$$

der Spannungstensor (dynamische Viskosität η) lautet

$$\pi = \begin{pmatrix} -p + 2\eta\partial_r v_r & \eta\left(\frac{1}{r}\partial_\varphi v_r + \partial_r v_\varphi - \frac{1}{r}v_\varphi\right) & \eta\left(\partial_r v_z + \partial_z v_r\right) \\ & -p + 2\eta\left(\frac{1}{r}\partial_\varphi v_\varphi + \frac{1}{r}v_r\right) & \eta\left(\partial_z v_\varphi + \frac{1}{r}\partial_\varphi v_z\right) \\ & & -p + 2\eta\partial_z v_z \end{pmatrix} \tag{6}$$

(nicht angegebene Matrixelemente sind symmetrisch).

36. **Hydrodynamisches Paradoxon**



An einer Röhre mit kreisförmigem Querschnitt (Radius r_0) ist ein Kreisring mit Radius R_0 befestigt. Durch die Röhre wird Luft mit der Geschwindigkeit v_0 geblasen, die wie eingezeichnet aus der Röhre in den Spalt zwischen den Kreisringen austritt und an den Rändern der Ringe in die Atmosphäre entweicht (Atmosphärendruck p_a).

1. Berechnen Sie die Kraft auf den unteren Kreisring. Nehmen Sie eine stationäre inkompressible reibungsfreie laminare Strömung an und vernachlässigen Sie Randeffekte. Nehmen Sie homogene Strömungen in den relevanten Querschnitten an.
2. Wird der Ring abgestoßen oder angezogen?

Übungsleitung: Dr. Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.t35.ph.tum.de.