

Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

29. Spannungstensor in allgemeinen Koordinaten und in Zylinderkoordinaten

1. Man mache sich aus der Vorlesung klar, dass die Kraft auf ein Fluid pro Oberflächeneinheit mit Normalenvektor \mathbf{n} bei einem inkompressiblen Newton'schen Fluid $\pi\mathbf{n}$ ist, wobei für den Spannungstensor

$$\pi_{ij} = -p\delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

gilt.

2. Zeigen Sie, dass sich für den Spannungstensor π in den q -Koordinaten von Aufgabe 27 ergibt:

$$\pi_{ij}^q = -p\mathbb{1} + \eta \left[\partial q [(\mathbf{v}^q \circ \nabla^q) \partial x] + \left(\frac{\partial v^i}{\partial q_j} \right)_{ij} + g^{-1} [(\mathbf{v}^q \circ \nabla^q) \partial x]^T \partial x + g^{-1} \left(\frac{\partial v^j}{\partial q_i} \right)_{ij}^T g \right]$$

3. Wie lautet der Spannungstensor in Zylinderkoordinaten?

30. Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten

Schreiben Sie die Navier-Stokes-Gleichungen für eine inkompressible Flüssigkeit

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \\ \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \circ \nabla) \mathbf{v} &= \mathbf{f} - \frac{1}{\varrho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \end{aligned}$$

in Zylinderkoordinaten $\mathbf{v}(r, \varphi, h) = (v^r, v^\varphi, v^h)$, $\mathbf{f}(r, \varphi, h) = (f^r, f^\varphi, f^h)$, $\varrho(r, \varphi, h)$, $p(r, \varphi, h)$ (vgl. Aufgabe 27).

Hinweis: Verwenden Sie zur Berechnung des Vektor-Laplace-Operators $\Delta \mathbf{v}$ in Zylinderkoordinaten ein Computeralgebra-Programm.

31. Couette-Strömung

Zwischen einem sehr langen Kreiszyylinder mit Radius R_1 und einem hohlen, coaxialen Zylinder mit Innenradius R_2 befindet sich eine viskose Newton'sche Flüssigkeit. Der innere Zylinder rotiert mit der Winkelgeschwindigkeit ω_1 , der äußere mit ω_2 . Die sich ausbildende Strömung heißt Couette-Strömung.

1. Berechnen Sie den Geschwindigkeitsverlauf der stationären Strömung. Die Volumenkkräfte seien vernachlässigbar.
2. Was ergibt sich für $R_1 = 0$?
3. Was ergibt sich für $\omega_2 = 0$ und $R_2 \rightarrow \infty$?
4. Zur Messung der Zähigkeit einer Flüssigkeit kann man das Couette-Viskosimeter verwenden: Der innere Zylinder hängt an einem Torsionsfaden und ruht im stationären Fall, der äußere bewegt sich mit konstanter Winkelgeschwindigkeit. Anhand der Verdrehung des Torsionsfadens wird das auf den inneren Zylinder wirkende Drehmoment M gemessen. Berechnen Sie hieraus die Zähigkeit.