Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

6. **Gauß'scher Integralsatz**

Beweisen Sie den Gauß'schen Integralsatz für

1. den Spezialfall des Geschwindigkeitsfelds in einer zylindrischen Röhre (Achse ist die x-Achse), die von einer Flüssigkeit mit Geschwindigkeit $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(x, y, z) = (v(x), 0, 0)$ durchstömt wird. Das Integrationsvolumen sei der Zylinder.
   Warum ist bei einer inkompressiblen Flüssigkeit div $\mathbf{v}(\mathbf{x}) = 0$?
   Warum gilt für die Dichte
   $$\frac{\partial \varrho(\mathbf{x}, t)}{\partial t} = -\mathrm{div}\, [\varrho(\mathbf{x}, t)\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)]\,?$$
2. ein beliebiges Vektorfeld $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ und einen achsparallelen Quader als Integrationsvolumen.

7. **Rotierende Flüssigkeit**

Das Geschwindigkeitsfeld einer Flüssigkeit sei
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{x}\,.$$

1. Zeigen Sie, dass für Vektoren $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c} \in \mathbb{R}^3$ gilt
   $$\boldsymbol{a} \times (\boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c}) = (\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{c})\boldsymbol{b} - (\boldsymbol{a} \circ \boldsymbol{b})\boldsymbol{c}\,.$$
2. Berechnen Sie
   $$\mathrm{rot}\, \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \nabla \times \boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})\,,$$
   indem Sie die Formel von 1. verwenden.
3. Berechnen Sie rot $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$ für den Spezialfall $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, \omega_3)$ direkt durch Differenzieren. Wie lässt sich das Ergebnis auf $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ verallgemeinern?
4. Berechnen Sie div $\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x})$.
5. Berechnen Sie den Verzerrungstensor
   $$D = (d_{ij}) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\right)\,.$$

Bitte wenden.

8. **Koordinatentransformationen**

Ein Diffeomorphismus $x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$x : \boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_1(q_1, q_2, q_3) \\ x_2(q_1, q_2, q_3) \\ x_3(q_1, q_2, q_3) \end{pmatrix}$$

heißt Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$.

1. Zeigen Sie, dass für die Jacobi-Matrizen der Abbildung x und deren Umkehrabbildung q gilt
$$\partial x(\boldsymbol{q}) = [\partial q(\boldsymbol{x})]^{-1}$$
2. Zeigen Sie, dass $(\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial x}{\partial q_2}, \frac{\partial x}{\partial q_3})$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.
3. Berechnen sie das Verhalten der Komponenten v^j des Vektorfeldes
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \sum_j v^j(\boldsymbol{x}) \frac{\partial x}{\partial q_j}$$
unter einer Koordinatentransformation $(q_1, q_2, q_3) \mapsto (q'_1, q'_2, q'_3)$.