Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

34. **Hydrodynamik eines Plasmas**

1. Plasma heißt der Zustand der Materie, in dem sich geladene Teilchen frei bewegen können, z.B. Gase bei Fusionsexperimenten und in Quecksilber. Wir benötigen zunächst die hydrodynamischen Gleichungen, welche lauten:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho_m &= -\nabla \circ (\varrho_m \mathbf{v}) \qquad \text{(Kontinuitätsgleichung)} && (1)\\ \varrho_m D_t \mathbf{v} &= \mathbf{f} - \nabla p \qquad \text{(Euler-Gleichung)} && (2)\\ \varrho_m &= \varrho_m(p) \qquad \text{(Zustandsgleichung).} && (3) \end{aligned}$$

Wir nehmen hier an, dass die Dichte nur vom Druck abhängt und dass die Temperatur konstant ist. Zeigen Sie, dass gilt

$$\partial_t (\varrho_m \mathbf{v}) = \mathbf{f} - \nabla^T \left(\varrho_m \mathbf{v}\mathbf{v}^T + p\mathbb{1}\right), \tag{4}$$

und interpretieren Sie das Resultat.

2. Die elektromagnetischen Gleichungen lauten

$$\begin{aligned} \partial_t \mathbf{E} &= c\nabla \times \mathbf{B} - \mathbf{j}_e && (5)\\ \partial_t \mathbf{B} &= -c\nabla \times \mathbf{E} && (6)\\ \nabla \circ \mathbf{E} &= \varrho_e && (7)\\ \nabla \circ \mathbf{B} &= 0 && (8)\\ \mathbf{I}_e &:= \mathbf{j}_e - \varrho_e \mathbf{v} = \sigma\left(\mathbf{E} + c^{-1}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \qquad \text{(Ohm'sches Gesetz)} && (9)\\ \mathbf{f} &= \varrho_e \mathbf{E} + c^{-1}\mathbf{j}_e \times \mathbf{B} \qquad \text{(Lorentz-Kraft),} && (10) \end{aligned}$$

wobei $\mathbf{E}$ die elektrische Feldstärke, $\mathbf{B}$ die magnetische Flussdichte, c die Lichtgeschwindigkeit, $\mathbf{j}_e$ die elektrische Stromdichte, ϱ_e die elektrische Ladung und σ die Leitfähigkeit bedeuten. Der durch die Leitfähigkeit verursachte ohmsche Strom $\mathbf{I}_e$, der gleich dem gesamten Strom *minus* dem durch die Bewegung der Flüssigkeit verursachten elektrischen Strom ist, proportional zum elektrischen Feld, *wie es ein mit der Flüssigkeit mitbewegter Beobachter sieht*, daher der Term $(\mathbf{v} \times \mathbf{B})$.
Zeigen Sie Ladungserhaltung aus den obigen Gleichungen:

$$\partial_t \varrho_e = -\nabla \circ \mathbf{j}_e \tag{11}$$

3. Wir führen nun geeignete Näherungen ein, damit das Gleichungssystem einfacher zu lösen ist. Zunächst betrachten wir die Rotation von der magnetische Flussdichte $\mathbf{B}$. Für Prozesse, welche etwa die Zeit τ benötigen, können wir die Zeitableitung durch

$$\partial_t g \approx \tau_g^{-1} g =: \omega_g g. \tag{12}$$

schätzen. In Plasmen ist die Leitfähigkeit σ i.d.R. sehr groß. Überlegen Sie sich, warum man bei sich langsam verändernden Feldern Gleichung (5) nähern kann durch

$$\nabla \times \mathbf{B} = c^{-1}\mathbf{j}_e. \tag{13}$$

4. Wir führen nun die *magnetische Reynolds-Zahl* $\mathcal{R}_M := \frac{\sigma L v}{c^2}$ ein. Die Länge L ist die charakteristische Länge, unter der sich die Systemgrößen wesentlich ändern. Die magnetische Reynolds-Zahl ist ein Maß dafür, wie stark die magnetischen Kräfte im Plasma sind. In den meisten Plasmen ist $\mathcal{R}_M \gg 1$, was zu zwei weiteren Vereinfachungen führt.
   Genau so wie bei der Zeitableitung können wir die räumlichen Ableitungen unter Verwendung der charakteristischen Länge schätzen:

$$\nabla g \approx L^{-1} g. \tag{14}$$

   Zeigen Sie, dass bei großer magnetischen Reynolds-Zahl das Ohm'sche Gesetz vereinfacht werden kann zu

$$\mathbf{j}_e = \sigma \left(\mathbf{E} + c^{-1}\mathbf{v} \times \mathbf{B}\right) \tag{15}$$

5. und die Lorentzkraft genähert werden kann durch

$$\mathbf{f} = c^{-1}\mathbf{j}_e \times \mathbf{B}\,. \tag{16}$$

6. Wir haben nun die folgenden Gleichungen abgeleitet, welche das System vollständig beschreiben:

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho_m &= -\nabla \circ (\varrho_m \mathbf{v}) & (17)\\ \partial_t (\varrho_m \mathbf{v}) &= c^{-1}\mathbf{j}_e \times \mathbf{B} - \nabla^T \left(\varrho_m \mathbf{v}\mathbf{v}^T + p(\varrho_m)\mathbb{1}\right) & (18)\\ \partial_t \mathbf{B} &= -c\nabla \times \mathbf{E} = \nabla \times (\mathbf{v} \times \mathbf{B}) + c^2\sigma^{-1}\Delta \mathbf{B}. & (19) \end{aligned}$$

   Das elektrische Feld sowie elektrische Ladungs- und Stromdichte können berechnet werden durch

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= c\sigma^{-1}\nabla \times \mathbf{B} - c^{-1}\mathbf{v} \times \mathbf{B} & (20)\\ \varrho_e &= \nabla \circ \mathbf{E} & (21)\\ \mathbf{j}_e &= c\nabla \times \mathbf{B}\,. & (22) \end{aligned}$$

   Die Anfangsbedingungen müssen natürlich $\nabla \circ \mathbf{B} = 0$ erfüllen. Diese Bedingung bleibt wegen Gleichung (19) erhalten.
   Zeigen Sie, dass der erste Term auf der rechten Seite von Gleichung (19) für $\mathcal{R}_M \gg 1$ dominiert.

7. Zeigen Sie, dass der magnetische Fluss durch eine mit dem Plasma mitbewegte Oberfläche

$$\Phi_M := \int_{S(t)} \mathbf{B} \circ \mathbf{ds}\,. \tag{23}$$

   konstant ist. Die magnetischen Feldlinien sind also im Plasma „eingefroren“.

8. Was passiert mit dem magnetischen Fluss in dem Fall dass der *zweite* Term auf der rechten Seite von Gleichung (19) dominiert?

Besprechung der Übungen am Montag den 6.2.2006 um 14-16 Uhr im Raum PH 127 (Garching) und am Dienstag, den 7.2.2006 um 9-11 Uhr im Raum PH HS3 (Garching).
Übungsleitung: Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T35/.