Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

27. **Vektordifferentialausdrücke in beliebigen krummlinigen Koordinaten**

Gegeben sei das orientierungstreue Koordinatensystem $x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

$$x : \boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_1(q_1, q_2, q_3) \\ x_2(q_1, q_2, q_3) \\ x_3(q_1, q_2, q_3) \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 9. Seien ∂x die Jacobi-Matrizen der Abbildung x bzw. deren Umkehrabbildung q, die Vektoren

$$\boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{q}) := \frac{\partial x}{\partial q_i}(\boldsymbol{q})$$

und der metrische Tensor $g = (g_{ij})$ mit

$$g_{ij}(\boldsymbol{q}) := \boldsymbol{e}_i(\boldsymbol{q}) \circ \boldsymbol{e}_j(\boldsymbol{q}) \, .$$

1. Zeigen Sie, dass
$$\det \partial x = \sqrt{\det g} \, .$$
und dass g invertierbar ist.

2. Der Vektor $\boldsymbol{v}$ sei
$$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \sum_j v^j(\boldsymbol{x}) \, \boldsymbol{e}_j \, .$$
Bezeichnen wir den Vektor $\boldsymbol{v}$ in q-Koordinaten als
$$\boldsymbol{v}^q = \begin{pmatrix} v^1 \\ v^2 \\ v^3 \end{pmatrix} .$$
Zeigen Sie, dass
$$\boldsymbol{v}^q = \partial q \, \boldsymbol{v}$$
und
$$v^i = \sum_j g^{-1}_{ij} \boldsymbol{e}_j \circ \boldsymbol{v} \, .$$

3. Zeigen Sie, dass für das Skalarprodukt zweier Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ gilt
$$\boldsymbol{u} \circ \boldsymbol{v} = \boldsymbol{u}^{qT} \, g \, \boldsymbol{v}^q \, .$$

4. Zeigen Sie, dass für das Vektorprodukt zweier Vektoren $\boldsymbol{u}$ und $\boldsymbol{v}$ gilt
$$\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v} = \sum_{ijkl} \varepsilon_{ijk} u^i v^j g^{-1}_{kl} \sqrt{\det g} \, \boldsymbol{e}_l \, .$$
Hinweis: Verwenden Sie $(\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})^i = \sum_j g^{-1}_{ij} \boldsymbol{e}_j \circ (\boldsymbol{u} \times \boldsymbol{v})$.

5. Zeigen Sie, dass für den Gradienten $(\nabla\Phi)^q$ in q-Koordinaten mit $\nabla^q := (\partial_{q_1}, \partial_{q_2}, \partial_{q_3})$ gilt

$$(\nabla\Phi)^q = g^{-1}\nabla^q\Phi\,.$$

6. Zeigen Sie, dass für die Divergenz gilt

$$\nabla \circ \boldsymbol{v} = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_i \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{\det g}\, v^i \right)\,.$$

   Hinweis: Zeigen Sie zunächst, dass

$$(\nabla \circ \boldsymbol{v}) \det \partial x = \frac{\partial}{\partial q_1} [\boldsymbol{v} \circ (\boldsymbol{e}_2 \times \boldsymbol{e}_3)] + \frac{\partial}{\partial q_2} [\boldsymbol{v} \circ (\boldsymbol{e}_3 \times \boldsymbol{e}_1)] + \frac{\partial}{\partial q_3} [\boldsymbol{v} \circ (\boldsymbol{e}_1 \times \boldsymbol{e}_2)]$$

   und dass für eine beliebige Matrix $A \in \mathbb{R}^{3x3}$ und beliebige Vektoren $\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3 \in \mathbb{R}^3$ gilt

$$\det(A\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) + \det(\boldsymbol{e}_1, A\boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3) + \det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, A\boldsymbol{e}_3) = \mathrm{Sp}\,(A)\, \det(\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)\,.$$

7. Zeigen Sie, dass für den Laplace-Operator gilt

$$\Delta\Phi = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{ik} \frac{\partial}{\partial q_i} \left(\sqrt{\det g}\, g^{-1}_{ik} \frac{\partial\Phi}{\partial q_k} \right)\,.$$

8. Schreiben Sie den Gradienten, die Divergenz und den Laplace-Operator in Zylinderkoordinaten

$$x(\boldsymbol{q}) = x(r, \varphi, h) = \begin{pmatrix} r\cos(\varphi) \\ r\sin(\varphi) \\ h \end{pmatrix}$$

28. **Schwingende Platte**

Eine sehr große ebene Platte bewege sich mit Amplitude a in ihrer eigenen Ebene harmonisch mit Kreisfrequenz ω in einem inkompressiblen Newton'schen Fluid (kinematische Viskosität ν) hin und her. Welche Strömungsgeschwindigkeit $\boldsymbol{v}(x, y, z, t)$ bildet sich im Fluid aus? Die Platte befinde sich in der x, z-Ebene und bewege sich parallel zur x-Achse. Vernachlässigen Sie die Schwerkraft.

Besprechung der Übungen am Dienstag, den 18.1.2005 um 9.30 Uhr im Raum HS3 (Garching).
Übungsleitung: Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T35/.