

## Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

### 9. Verzerrungstensor

Man betrachte einen achsparallelen Quader mit kleinen Kantenlängen  $(l_1, l_2, l_3)$ , der von den Vektoren  $(l_1 \mathbf{e}_1, l_2 \mathbf{e}_2, l_3 \mathbf{e}_3)$  aufgespannt wird. Dieser erfahre eine durch das Vektorfeld

$$\mathbf{u} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{u}(\mathbf{x}) = \mathbf{v}(\mathbf{x}) dt$$

gegebene kleine Verrückung. Größen zweiter Ordnung in  $dt$  sind im Folgenden zu vernachlässigen.

1. Sei  $\mathbf{r}$  ein Punkt im Quader vor der Verrückung und  $\mathbf{r}'$  der entsprechende Punkt nach der Verrückung. Der Quader wird durch  $\mathbf{u}$  transliert, gedreht und verzerrt. Man mache sich klar, dass in einem mit dem Quader mittranslierten und mitgedrehten Koordinatensystem gilt

$$\mathbf{r}' \approx \mathbf{r} + D\mathbf{r},$$

wobei

$$D = (d_{ij}) = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)$$

der Verzerrungstensor ist.

2. Zeigen Sie, dass für die relative Längenänderung einer Kante  $\mathbf{r}_i = l_i \mathbf{e}_i$  des Quaders gilt

$$\frac{|\mathbf{r}'_i| - |\mathbf{r}_i|}{|\mathbf{r}_i|} \approx d_{ii}.$$

3. Die Kanten  $\mathbf{r}_i$  und  $\mathbf{r}_j$  des Quaders schließen vor der Deformation einen Winkel  $\pi/2$  ein, nach der (kleinen) Deformation sei der Winkel  $\pi/2 - \delta_{ij}$ . Zeigen Sie, dass gilt

$$\sin \delta_{ij} \approx 2d_{ij}.$$

4. Zeigen Sie durch Berechnung der Determinante von  $D + I$ , dass für das Volumen  $V' = \mathbf{r}'_1 \circ (\mathbf{r}'_2 \times \mathbf{r}'_3)$  des verzerrten Quaders gilt

$$\frac{V' - V}{V} = \sum_{i=1}^3 d_{ii}.$$

## 10. Totale Ableitung

Beweisen Sie für die Funktionen  $f, g : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}; (x, y, z, t) \mapsto f(x, y, z, t)$ ,  $h : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  und  $\lambda \in \mathbb{R}$  folgende Eigenschaften der totalen Ableitung  $D_t$ :

1. Additivität

$$D_t(f + g) = D_t f + D_t g$$

2. Homogenität

$$D_t(\lambda f) = \lambda D_t f$$

3. Produktregel

$$D_t(f \cdot g) = f D_t g + g D_t f$$

4. Kettenregel

$$D_t(h \circ f) = (h' \circ f) D_t f$$