Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

1. **Kreuzprodukt**

   Zeigen Sie dass es zu jedem $\boldsymbol{\omega} \in \mathbb{R}^3$ eine eindeutige antisymmetrische Matrix Ω gibt, für die für alle $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$ gilt
   $$\Omega\,\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}$$

2. **Drehung**

   Sei Ω eine antisymmetrische 3×3 Matrix und $\varepsilon > 0$ klein.

   (i) Interpretieren Sie geometrisch die Abbildung
   $$D(\varepsilon)\,\mathbf{v} = (\mathbb{1} + \varepsilon\,\Omega)\,\mathbf{v} \ .$$
   Benutzen Sie dazu die Darstellung von Ω aus Aufgabe 1 und rechnen Sie in einem Koordinatensystem, in dem gilt $\boldsymbol{\omega} = (0, 0, 1)^T$.

   (ii) Berechnen Sie die n-te Iteration $D(\varepsilon)^n\,\mathbf{v}$.

   (iii) Berechnen und interpretieren Sie $\lim_{n\to\infty} D(\varphi/n)^n$.

3. **Gradient in gedrehten Koordinaten**

   Gegeben seien zwei gegeneinander verdrehte Koordinatensysteme (ungestrichene und gestrichene Koordinaten), also
   $$\mathbf{x}' = O\mathbf{x}\,,$$
   wobei O eine orthogonale Matrix ist. Zeigen Sie dass für die Ableitung nach gestrichenen Koordinaten
   $$\nabla' = \begin{pmatrix} \partial x' \\ \partial y' \\ \partial z' \end{pmatrix}$$
   gilt
   $$\nabla' = O\nabla\,.$$

4. **Ableitungen eines Vektorfelds**

   Zeigen Sie, dass die Ableitung $\nabla_i u_j = \frac{\partial u_j(x_1,x_2,x_3)}{\partial x_i}$ des Vektorfelds $(x_1, x_2, x_3) \mapsto \mathbf{u}(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$ ein Tensor ist. Hinweis: Benutzen Sie das Resultat aus Aufgabe 4.

5. **Exponentialreihe**

   Sei D eine $\mathbb{R}^{d\times d}$-Matrix. Zeigen Sie:

   1. Die Reihe
   $$e^D := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!}$$
   konvergiert.
   2. $\lim_{n\to\infty} (\mathbb{1} + \frac{1}{n} D)^n = e^D$

Besprechung der Übungen am Dienstag, den 2.12.2004 um 9.30 Uhr im Raum HS3 (Garching).
Übungsleitung: Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T35/.