Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

8. **Exponentialreihe**

   Seien A und B $\mathbb{R}^{d\times d}$-Matrizen. Zeigen Sie:

   1. $$e^A\, e^B = e^{A+B}$$

      Hinweis: Berechnen Sie das Cauchy-Produkt der Reihen e^A und e^B.

   2. Eine Drehung um den Winkel φ um die Achse $\boldsymbol{n} = (n_1, n_2, n_3)^T$ ist eine Hintereinanderausführung von Drehungen um die Winkel $\varphi\, n_i$ um die jeweiligen Koordinatenachsen.

9. **Koordinatentransformationen**

   Ein Diffeomorphismus $x : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$,

   $$x : \boldsymbol{q} = (q_1, q_2, q_3) \mapsto \begin{pmatrix} x_1(q_1, q_2, q_3) \\ x_2(q_1, q_2, q_3) \\ x_3(q_1, q_2, q_3) \end{pmatrix}$$

   heißt Koordinatensystem des $\mathbb{R}^3$.

   1. Zeigen Sie, dass für die Jacobi-Matrizen der Abbildung x und deren Umkehrabbildung q gilt
      $$\partial x(\boldsymbol{q}) = [\partial q(\boldsymbol{x})]^{-1}$$
   2. Zeigen Sie, dass $(\frac{\partial x}{\partial q_1}, \frac{\partial x}{\partial q_2}, \frac{\partial x}{\partial q_3})$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.
   3. Berechnen sie das Verhalten der Komponenten v^j des Vektorfeldes
      $$\boldsymbol{v}(\boldsymbol{x}) = \sum_j v^j(\boldsymbol{x})\, \frac{\partial x}{\partial q_j}$$
      unter einer Koordinatentransformation $(q_1, q_2, q_3) \mapsto (q'_1, q'_2, q'_3)$.