

Mechanik der Kontinua

Prof. J. L. van Hemmen

21. Navier-Stokes-Gleichungen in Zylinderkoordinaten

Schreiben Sie die Navier-Stokes-Gleichungen für eine inkompressible Flüssigkeit

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{v} &= 0 \\ \partial_t \mathbf{v} + (\mathbf{v} \circ \nabla) \mathbf{v} &= \mathbf{f} - \frac{1}{\varrho} \nabla p + \nu \Delta \mathbf{v} \end{aligned}$$

in Zylinderkoordinaten $\mathbf{v}(r, \varphi, h) = (v^r, v^\varphi, v^h)$, $\mathbf{f}(r, \varphi, h) = (f^r, f^\varphi, f^h)$, $\varrho(r, \varphi, h)$, $p(r, \varphi, h)$ (vgl. Aufgabe 20).

22. Spannungstensor in allgemeinen Koordinaten und in Zylinderkoordinaten

- Man mache sich aus der Vorlesung klar, dass die Kraft auf ein Fluid pro Flächeneinheit mit Normalenvektor \mathbf{n} bei einem inkompressiblen Newton'schen Fluid $\pi \mathbf{n}$ ist, wobei für den Spannungstensor

$$\pi_{ij} = -p \delta_{ij} + \eta \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$$

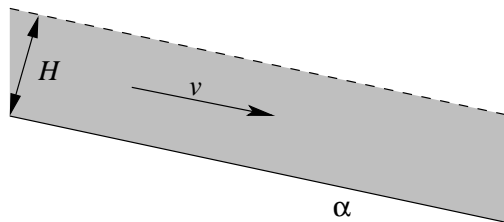
gilt.

- Zeigen Sie, dass sich für den Spannungstensor π in den q-Koordinaten von Aufgabe 20 ergibt:

$$\pi_{ij}^q = -p I + \eta \left[\partial_q [(\mathbf{v}^q \circ \nabla^q) \partial x] + \left(\frac{\partial v^i}{\partial q_j} \right)_{ij} + g^{-1} [(\mathbf{v}^q \circ \nabla^q) \partial x]^T \partial x + g^{-1} \left(\frac{\partial v^j}{\partial q_i} \right)_{ij}^T g \right]$$

- Wie lautet der Spannungstensor in Zylinderkoordinaten?

23. Flachwasserströmung



- Berechnen Sie die Geschwindigkeits- und Druckverteilung der stationären Strömung, die sich längs einer schiefen Ebene aufgrund der Schwerkraft ausbildet. Die Höhe der Strömung senkrecht zur Platte sei H , der Neigungswinkel α .
- Welche Kraft wirkt die Wand auf das Fluid aus?
- Der Volumendurchsatz pro Breite der Strömung sei \dot{V}/b . Berechnen Sie hieraus die Höhe H der Strömung.

24. Schwingende Platte

Eine sehr große ebene Platte bewege sich mit Amplitude a in ihrer eigenen Ebene harmonisch mit Kreisfrequenz ω in einem inkompressiblen Newton'schen Fluid (kinematische Viskosität ν) hin und her. Welche Strömungsgeschwindigkeit $\mathbf{v}(x, y, z, t)$ bildet sich im Fluid aus? Die Platte befinde sich in der x, z -Ebene und bewege sich parallel zur x -Achse. Vernachlässigen Sie die Schwerkraft.

25. Allgemeine Lösung der 1-dimensionalen Wellengleichung

Zeigen Sie, dass

$$\eta(x, t) = f(x - ct) + g(x + ct)$$

die allgemeine Lösung der 1-dimensionalen Wellengleichung

$$\partial_t^2 \eta(x, t) = c^2 \partial_x^2 \eta(x, t)$$

mit $\eta : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ist, indem Sie zeigen, dass der Ansatz

1. eine Lösung der Wellengleichung ist.
2. sich an beliebige Anfangszustände $\eta(x, 0) = f_1(x)$ und $\partial_t \eta(x, 0) = f_2(x)$ anpassen lässt.