Übung zur theoretischen Physik neuronaler Informationsverarbeitung
(Prof. J. L. van Hemmen)

Aufgabe 1: Myeliniesiertes Axon

Axone im Ischias-Nerv des Frosches sind myelinisiert und haben mit Myelin einen Durchmesser von $15\,\mu$m, ohne Myelin $10{,}5\,\mu$m. Alle 1,38 mm ist das Myelin durch einen Ranvier'schen Schnürring mit einer Länge von $2{,}5\,\mu$m unterbrochen. Die Gesamtkapazität eines myelinisierten Bereichs beträgt 2,2 pF, die Gesamtkapazität eines Ranvier'schen Schnürrings 1,6 pF. Nehmen Sie an, dass der spezifische Membran-Querwiderstand $5000\,\Omega\,\mathrm{cm}^2$ und der spezifische Membran-Längswiderstand $50\,\Omega\,\mathrm{cm}$ betragen.

1. Wie schnell in etwa breitet sich ein Spannungspuls in einer myelinisierten Nervenfaser aus?
2. Wie schnell würde sich ein Spannungspuls in einer nicht myelinisierten Nervenfaser ausbreiten?

Aufgabe 2: Hopfield-Modell

Gegeben seinen N Neuronen mit Zuständen $S_i(t) \in \{+1, -1\}$ zur Zeit t und q Muster $\xi_i^\mu \in \{+1, -1\}$, wobei $1 \leqslant i \leqslant N$ und $1 \leqslant \mu \leqslant q$. Die Muster $\boldsymbol{\xi}^\mu = (\xi_1^\mu, \ldots, \xi_N^\mu)$ bestehen aus unabhängigen, identisch verteilten Zufallszahlen mit Mittelwert 0. Das lokale Potential $h_i(t)$ an Neuron i ist

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^{N} J_{ij} S_j(t)\,. \tag{1}$$

Der Zustand $\boldsymbol{S}$ zum Zeitschritt $t + \Delta t$ ergibt sich aus dem Zustand zur Zeit t entsprechend der deterministischen Dynamik

$$S_i(t + \Delta t) = \operatorname{sgn}(h_i(t))\,. \tag{2}$$

Die q Muster seien zuvor bereits durch die Hebb'sche Regel

$$J_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^{q} \xi_i^\mu \xi_j^\mu & \text{für } i \neq j \\ 0 & \text{für } i = j \end{cases} \tag{3}$$

gelernt worden. Ein derartiges Netzwerk stellt einen assoziativen Speicher dar, dessen Attraktoren den gespeicherten Mustern entsprechen.

Bitte wenden.

1. Der Anfangszustand des Netzes sei ein beliebiges Muster (z.B. $\boldsymbol{S}(t_0) = \boldsymbol{\xi}^\nu$). Berechnen Sie die maximal speicherbare Zahl der Muster $q_{\max}$ für $N \to \infty$, wenn zur Zeit $t_0 + \Delta t$

   (a) die Wahrscheinlichkeit, dass ein beliebiges Neuron instabil ist, näherungsweise kleiner als 1 % sein soll.

   (b) alle Spins mit 99 %-iger Wahrscheinlichkeit richtig sein müssen.
   Hinweis: Verwenden Sie für das Gauß'sche Fehlerintegral

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2}\, \mathrm{d}t \tag{4}$$

   die Abschätzung

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x + \sqrt{x^2 + 2}} < 1 - \operatorname{erf}(x) \leqslant \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{e^{-x^2}}{x + \sqrt{x^2 + \frac{4}{\pi}}}\,. \tag{5}$$

2. (a) Zeigen Sie, dass

$$H(t) = -\sum_{i=1}^{N} |h_i(t)| \tag{6}$$

   eine Lyapunovfunktion bezüglich der oben angegebenen Dynamik mit symmetrischen ($J_{ij} = J_{ji}$), ansonsten beliebigen Synapsenstärken J_{ij} ist.

   (b) Zeigen Sie, dass bei zufällig gewählten Synapsenstärken $J_{ij} = J_{ji}$ (z.B. gleichverteilt aus $[-1, 1]$) die Dynamik mit Wahrscheinlichkeit 1 entweder zu einem Fixpunkt konvergiert oder zu einem $2\Delta t$-periodischen Grenzzyklus.

Besprechung der Übungen am Freitag, den 9.7.2010 um 8.30 Uhr im Raum PH 2271 (Garching).

Übungsleitung: Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.t35.ph.tum.de .