

## Übung zur theoretischen Physik neuronaler Informationsverarbeitung (Prof. J. L. van Hemmen)

### Aufgabe 1: Stabilität von Fixpunkten

Ein System mit Zustand  $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$  verhalte sich nach den Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t)). \quad (1)$$

Hierbei seien  $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $i = 1, \dots, n$ , stetig differenzierbare Funktionen. Ein Punkt  $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$  heißt Fixpunkt, wenn  $f_i(\mathbf{x}_0) = 0$  für  $i = 1, \dots, n$ . Ein Fixpunkt heißt (asymptotisch) stabil, wenn sich das System nach einer kleinen Auslenkung  $\mathbf{x}(0)$ ,  $|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < \delta$ , wieder auf den Fixpunkt zu bewegt, also  $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$ .

1. Machen Sie sich plausibel, dass ein Fixpunkt jedenfalls dann stabil ist, wenn die Realteile der Eigenwerte der Jacobi-Matrix  $D = (\partial_{x_j} f_i)$  negativ sind.
2. Zeigen Sie, dass im Spezialfall  $n = 2$  gilt: Falls die Spur  $\text{Sp } D < 0$  und die Determinante  $\det D > 0$ , dann sind die Realteile der Eigenwerte von  $D$  negativ.

### Aufgabe 2: Relaxationszeit

Wie lange dauert es beim FitzHugh-Nagumo-Modell, bis das System nach einer Spike-Auslösung wieder in den Ruhezustand zurückkehrt? Stellen Sie hierzu die gesuchte „Relaxationszeit“ als Integral dar.

### Aufgabe 3: FitzHugh-Nagumo-Modell

Das FitzHugh-Nagumo-Modell ist gegenüber dem Hodgkin-Huxley-Modell eine wesentliche Vereinfachung, zeigt aber, abgesehen von beim Hodgkin-Huxley-Modell möglichen chaotischen Lösungen, ein qualitativ ähnliches Verhalten. In diesem (dimensionslosen) 2-Variablen-Modell spielt  $u$  die Rolle des Membranpotentials,  $v$  beschreibt den Einfluss der Ionenkanäle. Die Dynamik ist

$$\frac{du}{dt} = u(a - u)(u - 1) - v + I =: f(u, v), \quad \frac{dv}{dt} = bu - \gamma v =: g(u, v), \quad (2)$$

mit den Parametern  $0 < b, \gamma$  sowie  $b, \gamma \ll a < 1$ . Die Größe  $I$  beschreibt einen zugeführten Strom.

Klassifizieren Sie alle auftretenden Fixpunkte nach Stabilität und Instabilität. Unterscheiden Sie dabei insbesondere verschiedene Bereiche des Inputstromes  $0 < I = \text{const.}$ , sowie der Systemparameter  $b$  und  $\gamma$ .

Hinweis: Es erspart Rechenaufwand, die Klassifikation qualitativ unter Anschauung der beiden Null-Isoklinen  $f(u, v) = 0$  und  $g(u, v) = 0$  vorzunehmen.

---

Besprechung der Übungen am Freitag, den 28.5.2010 um 8.30 Uhr im Raum PH 2271 (Garching).

Übungsleitung: Moritz Franosch, mail@Franosch.org, <http://www.t35.ph.tum.de> .