

## Übung zur theoretischen Physik neuronaler Informationsverarbeitung (Prof. J. L. van Hemmen)

### Aufgabe 1: Eigenschaften der Fundamentallösung der Kabelgleichung

Die Fundamentallösung der Kabelgleichung lautet

$$V_f(x, t) = \frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\pi t/\tau}\lambda\tau} \exp\left[-t/\tau - \frac{(x/\lambda)^2}{4t/\tau}\right]. \quad (1)$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fundamentallösung:

1. Die Gesamtladung fällt exponentiell ab.
2. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Maximums, d.i. der betrachtete Ort geteilt durch die Zeit, bis hier die Spannung ihr Maximum erreicht, ist  $2\lambda/\tau$  für Zeitpunkte  $t \gg \tau$ .
3.  $\lim_{t \rightarrow 0^+} V_f(x, t) = \frac{1}{\tau}\delta(x)$

### Aufgabe 2: Simulation eines Hopfield-Netzes

Gegeben seien  $N$  Neuronen mit Zuständen  $S_i(t) \in \{+1, -1\}$  zur Zeit  $t$  und  $q$  Muster  $\xi_i^\mu \in \{+1, -1\}$ , wobei  $1 \leq i \leq N$  und  $1 \leq \mu \leq q$ . Die Muster  $\xi^\mu = (\xi_1^\mu, \dots, \xi_N^\mu)$  bestehen aus unabhängigen, identisch verteilten Zufallszahlen mit Mittelwert 0. Das lokale Potential  $h_i(t)$  an Neuron  $i$  ist

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^N J_{ij} S_j(t). \quad (2)$$

Der Zustand  $\mathbf{S}$  zum Zeitschritt  $t + \Delta t$  ergibt sich aus dem Zustand zur Zeit  $t$  entsprechend der deterministischen Dynamik

$$S_i(t + \Delta t) = \text{sgn}(h_i(t)). \quad (3)$$

Die  $q$  Muster seien zuvor bereits durch die Hebb'sche Regel

$$J_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N} \sum_{\mu=1}^q \xi_i^\mu \xi_j^\mu & \text{für } i \neq j \\ 0 & \text{für } i = j \end{cases} \quad (4)$$

gelernt worden. Ein derartiges Netzwerk stellt einen assoziativen Speicher dar, dessen Attraktoren den gespeicherten Mustern entsprechen.

Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung eines Hopfield-Netzes aus  $N = 100$  Neuronen im Computer.

Bestimmen Sie dazu zunächst  $q$  Muster  $\xi^\mu$ ,  $1 \leq \mu \leq q$ , wobei die  $\xi_i^\mu$  mit jeweils Wahrscheinlichkeit  $1/2$  auf  $+1$  oder  $-1$  gesetzt werden. Berechnen Sie dann nach (4) die synaptischen Gewichte  $J_{ij}$ .

Lassen Sie das Netzwerk mit allen Mustern als Anfangszustand, also

$$S_i(t_0) = \xi_i^\mu, \quad (5)$$

für  $\mu = 1, \dots, q$ , laufen.

Wieviele Muster werden korrekt „erinnert“, sind also Fixpunkte unter der Dynamik (3)?

Berechnen Sie mit Ihrem Programm, welcher Prozentsatz an Mustern korrekt erinnert wird für  $q = 1, \dots, 100$ .

Steigern Sie auf  $N = 1000$  Neuronen und  $q = 10, 20, 30, \dots, 200!$

---

Besprechung der Übungen am Freitag, den 3.7.2009 um 8.45 Uhr im Raum PH 2271 (Garching).

Übungsleitung: Moritz Franosch, mail@Franosch.org, <http://www.t35.ph.tum.de> .