Physik Department
TU München
Theoretische Physik

SoSe 2009
Übungsblatt 3
29.5.2009

Übung zur theoretischen Physik neuronaler Informationsverarbeitung
(Prof. J. L. van Hemmen)

Aufgabe 1: Stabilität von Fixpunkten

Ein System mit Zustand $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ verhalte sich nach den Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), \ldots, x_n(t)) \,. \tag{1}$$

Hierbei seinen $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$, $i = 1, \ldots, n$, stetig differenzierbare Funktionen. Ein Punkt $\boldsymbol{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Fixpunkt, wenn $f_i(\boldsymbol{x}_0) = 0$ für $i = 1, \ldots, n$. Ein Fixpunkt heißt (asymptotisch) stabil, wenn sich das System nach einer kleinen Auslenkung $\boldsymbol{x}(0)$, $|\boldsymbol{x}(0) - \boldsymbol{x}_0| < \delta$, wieder auf den Fixpunkt zu bewegt, also $\lim_{t\to\infty} \boldsymbol{x}(t) = \boldsymbol{x}_0$.

1. Machen Sie sich plausibel, dass ein Fixpunkt jedenfalls dann stabil ist, wenn die Realteile der Eigenwerte der Jacobi-Matrix $D = (\partial_{x_j} f_i)$ negativ sind.
2. Zeigen Sie, dass im Spezialfall $n = 2$ gilt: Falls die Spur $\mathrm{Sp}\, D < 0$ und die Determinante $\det D > 0$, dann sind die Realteile der Eigenwerte von D negativ.

Aufgabe 2: Relaxationszeit

Wie lange dauert es beim FitzHugh-Nagumo-Modell, bis das System nach einer Spike-Auslösung wieder in den Ruhezustand zurückkehrt? Stellen Sie hierzu die gesuchte „Relaxationszeit“ als Integral dar.

Bitte wenden.

Aufgabe 3: FitzHugh-Nagumo-Modell

Das FitzHugh-Nagumo-Modell ist gegenüber dem Hodgkin-Huxley-Modell eine wesentliche Vereinfachung, zeigt aber, abgesehen von beim Hodgkin-Huxley-Modell möglichen chaotischen Lösungen, ein qualitativ ähnliches Verhalten. In diesem (dimensionslosen) 2-Variablen-Modell spielt u die Rolle des Membranpotentials, v beschreibt den Einfluss der Ionenkanäle. Die Dynamik ist

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = u(a-u)(u-1) - v + I =: \mathrm{f}(u,v) \ , \quad \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = bu - \gamma v =: \mathrm{g}(u,v) \ , \tag{2}$$

mit den Parametern $0 < b, \gamma$ sowie $b, \gamma \ll a < 1$. Die Größe I beschreibt einen zugeführten Strom.

1. Klassifizieren Sie alle auftretenden Fixpunkte nach Stabilität und Instabilität. Unterscheiden Sie dabei insbesondere verschiedene Bereiche des Inputstromes $0 < I = \mathrm{const.}$, sowie der Systemparameter b und γ.
   Hinweis: Es erspart Rechenaufwand, die Klassifikation qualitativ unter Anschauung der beiden Null-Isoklinen $\mathrm{f}(u,v) = 0$ und $\mathrm{g}(u,v) = 0$ vorzunehmen.
2. Zeigen Sie, dass im Fall genau eines Fixpunkts dieser entweder stabil ist oder ein Grenzzyklus auftritt. Skizzieren Sie im Falle des Grenzzyklus Trajektorien mit verschiedenen Anfangsbedingungen.
   Hinweis: Der Nachweis eines Grenzzyklus gelingt z.B. dadurch, dass man zeigt:
   (a) Es gibt ein endliches Gebiet im Phasenraum, aus dem Trajektorien nicht ausbrechen können.
   (b) In diesem Gebiet befindet sich genau ein Fixpunkt, welcher ein instabiler Knoten oder eine instabile Spirale ist.
3. Der Neuronen-Zustand befinde sich für Zeiten $t < 0$ am einzigen Fixpunkt $(u,v) = (0,0)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde ein kurzer Strompuls der Stärke α gegeben, $I(t) = \alpha\,\delta(t)$. Skizzieren Sie Trajektorien für verschiedene $\alpha > 0$. Gibt es eine Schwelle für die Spike-Auslösung in diesem Modell?

Besprechung der Übungen am Freitag, den 5.6.2009 um 8.45 Uhr im Raum PH 2271 (Garching).

Übungsleitung: Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.t35.ph.tum.de .