Übung zur theoretischen Physik neuronaler Informationsverarbeitung
(Prof. J. L. van Hemmen)

Aufgabe 1: Eigenschaften der Fundamentallösung der Kabelgleichung

Die Fundamentallösung der Kabelgleichung lautet

$$V_f(x,t) = \frac{\Theta(t)}{2\sqrt{\pi t/\tau}\lambda\tau} \exp\left[-t/\tau - \frac{(x/\lambda)^2}{4t/\tau}\right] . \tag{1}$$

Zeigen Sie folgende Eigenschaften der Fundamentallösung:

1. Die Gesamtladung fällt exponentiell ab.
2. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit des Maximums, d.i. der betrachtete Ort geteilt durch die Zeit, bis hier die Spannung ihr Maximum erreicht, ist $2\lambda/\tau$ für Zeitpunkte $t \gg \tau$.
3. $\lim_{t\to 0+} V_f(x,t) = \frac{1}{\tau}\delta(x)$

Aufgabe 2: Simulation eines Hopfield-Netzes

Gegeben seinen N Neuronen mit Zuständen $S_i(t) \in \{+1,-1\}$ zur Zeit t und q Muster $\xi_i^\mu \in \{+1,-1\}$, wobei $1 \leqslant i \leqslant N$ und $1 \leqslant \mu \leqslant q$. Die Muster $\boldsymbol{\xi}^\mu = (\xi_1^\mu, \ldots, \xi_N^\mu)$ bestehen aus unabhängigen, identisch verteilten Zufallszahlen mit Mittelwert 0. Das lokale Potential $h_i(t)$ an Neuron i ist

$$h_i(t) = \sum_{j=1}^{N} J_{ij} S_j(t) . \tag{2}$$

Der Zustand $\boldsymbol{S}$ zum Zeitschritt $t + \Delta t$ ergibt sich aus dem Zustand zur Zeit t entsprechend der deterministischen Dynamik

$$S_i(t+\Delta t) = \operatorname{sgn}(h_i(t)) . \tag{3}$$

Die q Muster seien zuvor bereits durch die Hebb'sche Regel

$$J_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{N}\sum_{\mu=1}^{q} \xi_i^\mu \xi_j^\mu & \text{für } i \neq j \\ 0 & \text{für } i = j \end{cases} \tag{4}$$

gelernt worden. Ein derartiges Netzwerk stellt einen assoziativen Speicher dar, dessen Attraktoren den gespeicherten Mustern entsprechen.

Berechnen Sie die zeitliche Entwicklung eines Hopfield-Netzes aus $N = 100$ Neuronen im Computer.

Bestimmen Sie dazu zunächst q Muster $\boldsymbol{\xi}^\mu$, $1 \leqslant \mu \leqslant q$, wobei die ξ_i^μ mit jeweils Wahrscheinlichkeit $1/2$ auf $+1$ oder -1 gesetzt werden. Berechnen Sie dann nach (4) die synaptischen Gewichte J_{ij}.

Lassen Sie das Netzwerk mit allen Mustern als Anfangszustand, also

$$S_i(t_0) = \xi_i^\mu \,, \tag{5}$$

für $\mu = 1, \ldots, q$, laufen.

Wieviele Muster werden korrekt „erinnert“, sind also Fixpunkte unter der Dynamik (3)?

Berechnen Sie mit Ihrem Programm, welcher Prozentsatz an Mustern korrekt erinnert wird für $q = 1, \ldots, 100$.

Steigern Sie auf $N = 1000$ Neuronen und $q = 10, 20, 30, \ldots, 200$!

Besprechung der Übungen am Freitag, den 27.6.2008 um 8.30 Uhr im Raum PH 2271 (Garching).

Übungsleitung: Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.t35.ph.tum.de .