

Übung zur theoretischen Physik neuronaler Informationsverarbeitung
(Prof. J. L. van Hemmen)

Aufgabe 1: Green'sche Funktionen, lineare Überlagerung von EPSPs

Gegeben sei die (dimensionslose) Kabelgleichung

$$\partial_t V = \partial_x^2 V - V + I \quad 0 < x < L, 0 < t \quad (1)$$

(Membranspannung $V(x, t)$, Inputstrom $I(x, t)$) mit den Randbedingungen für die Orte $x = 0$ und $x = L$ und der Anfangsbedingung für die Zeit $t = 0$:

$$\alpha_1 V(0, t) + \beta_1 \partial_x V(0, t) = 0 \quad (2)$$

$$\alpha_2 V(L, t) + \beta_2 \partial_x V(L, t) = 0 \quad (3)$$

$$V(x, 0) = v(x) \quad 0 \leq x \leq L. \quad (4)$$

Dann ist die Green'sche Funktion $G(x, y, t)$ für Gleichung (1) mit den Randbedingungen (2) und (3) definiert als die Lösung der Gleichung:

$$\partial_t G = \partial_x^2 G - G + \delta(x - y) \delta(t) \quad 0 \leq x \leq L, 0 \leq y \leq L, 0 \leq t \quad (5)$$

$G(x, y, t)$ soll hier die gleichen Randbedingungen wie $V(x, t)$ und die Anfangsbedingung $G(x, y, t) = 0$ für $t < 0$ erfüllen.

Wenn wir nun $G(x, y, t)$ kennen, kann die Membranspannung $V(x, t)$ für beliebige Ströme $I(x, t)$ ausgerechnet werden:

$$V(x, t) = \int_0^L G(x, y, t) v(y) dy + \int_0^L \int_0^t G(x, y, t - s) I(y, s) ds dy \quad (6)$$

1. Zeigen Sie, dass $V(x, t)$ aus (6) die Randbedingungen und die Anfangsbedingung für $V(x, 0)$ erfüllt.
2. Zeigen Sie, daß $V(x, t)$ aus (6) die partielle lineare Differentialgleichung (1) erfüllt für $t > 0$. (Hinweis: Zeigen Sie zunächst $\frac{\partial}{\partial t} \int_0^t f(s, t) ds = f(t, t) + \int_0^t \frac{\partial f(s, t)}{\partial t} ds$.)
3. Am Ort einer Synapse $x = 0$ kommt jetzt ein Spiketrain an. (eine Serie von N Aktionspotentialen zu den Zeiten t^f , $f = 1, \dots, N$). Jedes Aktionspotential des Spiketrains löst einen Strompuls der gleichen Form $I^f(0, t) = \alpha(t - t^f)$ aus. Wie sieht der Response auf den Spiketrain an einem festen Ort $x = L$ (z.B. am Soma) aus?

Aufgabe 2: Kabelgleichung

Die Kabelgleichungen für $C_m = 0$ lauten

$$\partial_x V(x) = -R_{i\ell}(x) \quad (7)$$

$$\partial_x i_\ell(x) = -\frac{1}{R_m} V(x) \quad (8)$$

Schreiben Sie dieses Differenzialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten als

$$\partial_x \mathbf{y}(x) = A \mathbf{y}(x),$$

mit $y \in \mathbb{R}^2$ und $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$.

Berechnen Sie die allgemeine Lösung.

Besprechung der Übungen am Freitag, den 6.6.2008 um 8.30 Uhr im Raum PH 2271 (Garching).

Übungsleitung: Moritz Franosch, mail@Franosch.org, <http://www.t35.ph.tum.de> .