

Übung zur theoretischen Physik neuronaler Informationsverarbeitung
(Prof. J. L. van Hemmen)

Aufgabe 1: Stabilität von Fixpunkten

Ein System mit Zustand $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ verhalte sich nach den Differentialgleichungen

$$\dot{x}_i(t) = f_i(x_1(t), \dots, x_n(t)). \quad (1)$$

Hierbei seien $f_i : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, stetig differenzierbare Funktionen. Ein Punkt $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ heißt Fixpunkt, wenn $f_i(\mathbf{x}_0) = 0$ für $i = 1, \dots, n$. Ein Fixpunkt heißt (asymptotisch) stabil, wenn sich das System nach einer kleinen Auslenkung $\mathbf{x}(0)$, $|\mathbf{x}(0) - \mathbf{x}_0| < \delta$, wieder auf den Fixpunkt zu bewegt, also $\lim_{t \rightarrow \infty} \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0$.

1. Machen Sie sich plausibel, dass ein Fixpunkt jedenfalls dann stabil ist, wenn die Realteile der Eigenwerte der Jacobi-Matrix $D = \partial_{x_j} f_i$ negativ sind.
2. Zeigen Sie, dass im Spezialfall $n = 2$ gilt: Falls die Spur $\text{Sp } D < 0$ und die Determinante $\det D > 0$, dann sind die Realteile der Eigenwerte von D negativ.

Aufgabe 2: Relaxationszeit

Wie lange dauert es beim FitzHugh-Nagumo-Modell, bis das System nach einer Spike-Auslösung wieder in den Ruhezustand zurückkehrt? Stellen Sie hierzu die gesuchte „Relaxationszeit“ als Integral dar.

Aufgabe 3: FitzHugh-Nagumo-Modell

Das FitzHugh-Nagumo-Modell ist gegenüber dem Hodgkin-Huxley-Modell eine wesentliche Vereinfachung, zeigt aber, abgesehen von chaotischen Lösungen, ein qualitativ ähnliches Verhalten. In diesem (dimensionslosen) 2-Variablen-Modell spielt u die Rolle des Membranpotentials, v beschreibt den Einfluss der Ionenkanäle. Die Dynamik ist

$$\frac{du}{dt} = u(a - u)(u - 1) - v + I =: f(u, v), \quad \frac{dv}{dt} = bu - \gamma v =: g(u, v), \quad (2)$$

mit den Parametern $0 < b, \gamma$ sowie $b, \gamma \ll a < 1$. Die Größe I beschreibt einen zugeführten Strom.

1. Klassifizieren Sie alle auftretenden Fixpunkte nach Stabilität und Instabilität. Unterscheiden Sie dabei insbesondere verschiedene Bereiche des Inputstromes $0 < I = \text{const.}$, sowie der Systemparameter b und γ .
Hinweis: Es erspart Rechenaufwand, die Klassifikation qualitativ unter Anschauung der beiden Null-Isoklinen $f(u, v) = 0$ und $g(u, v) = 0$ vorzunehmen.
2. Zeigen Sie, dass im Fall genau eines Fixpunkts dieser entweder stabil ist oder ein Grenzzyklus auftritt. Skizzieren Sie im Falle des Grenzzyklus Trajektorien mit verschiedenen Anfangsbedingungen.
Hinweis: Der Nachweis eines Grenzzyklus gelingt z.B. dadurch, dass man zeigt:
 - (a) Es gibt ein endliches Gebiet im Phasenraum, aus dem Trajektorien nicht ausbrechen können.
 - (b) In diesem Gebiet befindet sich genau ein Fixpunkt, welcher ein instabiler Knoten oder eine instabile Spirale ist.
3. Der Neuronen-Zustand befinde sich für Zeiten $t < 0$ am einzigen Fixpunkt $(u, v) = (0, 0)$. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werde ein kurzer Strompuls der Stärke α gegeben, $I(t) = \alpha \delta(t)$. Skizzieren Sie Trajektorien für verschiedene $\alpha > 0$. Gibt es eine Schwelle für die Spike-Auslösung in diesem Modell?

Am Freitag den 18.5. ist keine Übung!

Besprechung der Übungen am Freitag, den 25.5.2007 um 9.15 Uhr im Raum PH 2271 (Garching).

Übungsleitung:

Moritz Franosch, mail@Franosch.org, <http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T35/>.