Physik Department
TU München
Theoretische Physik

SoSe 2006
Übungsblatt 2
12.5.2006

Übung zur theoretischen Physik neuronaler Informationsverarbeitung
(Prof. J. L. van Hemmen)

Aufgabe 1: Ionenfluss durch eine Membran

1. Die (molare) Ionenflussdichte durch eine Membran setzt sich zusammen aus einem Diffusionsbeitrag (hervorgerufen durch einen Konzentrationsgradienten) und einem Beitrag, der durch ein elektrisches Feld E in der Membran bestimmt wird. Wir betrachten einen eindimensionalen Querschnitt durch die Membran. Hierbei seien:
   z: Valenz der Ionen
   D: Diffusionskonstante
   μ: Beweglichkeit der Ionen (Geschwindigkeit der Ionen: $v = \mu \frac{z}{|z|} E$)
   $\Phi(x,t)$: elektrisches Potenzial am Ort x zur Zeit t
   $C(x,t)$: (molare) Konzentration der Ionen am Ort x zur Zeit t

   Begründen Sie die Gleichung für die molare Ionenflussdichte $J(x,t)$ am Ort x zur Zeit t

   $$J(x,t) = -D \frac{\partial C(x,t)}{\partial x} - \mu \frac{z}{|z|} \frac{\partial \Phi(x,t)}{\partial x} C(x,t) \ .$$

   Bemerkung: Ist F die Faraday-Konstante, dann hängen nach der Einstein-Relation die Diffusionskonstante und die Beweglichkeit gemäß

   $$D = \frac{RT}{|z|F} \, \mu$$

   zusammen.

2. Im stationären Fall ist die Ionenflussdichte eine Konstante: $J(x) = J$. (Warum?) Dasselbe gilt auch für die elektrische Stromdichte $j = zFJ$. Die Gleichung aus 1. heißt dann *(stationäre) Nernst-Planck Gleichung*. Geben Sie ihre allgemeine Lösung $C(x)$ an, gegeben $\Phi(x)$.

3. Nehmen wir nun eine Membran der Dicke Δ an. Gewinnen Sie aus der Lösung von 2. einen Ausdruck für die Stromdichte j in Abhängigkeit des Spannungsverlaufs $\Phi(x)$ in der Membran, der Membranspannung V_m und der Innen- und Außen-Konzentrationen C_i und C_a der Ionen.

Bitte wenden.

4. Gegeben seien jetzt n Ionensorten derselben Valenz z. Ihre Diffusionskonstanten seien $D_1, \dots, D_n$. Ihre Permeabilitäten sind $P_k := D_k/\Delta$ ($k = 1, \dots, n$). Berechnen Sie die stationäre Membranspannung als Funktion der Innen- und Außen-Konzentrationen und Permeabilitäten der Ionen. (Spezialfall: Bei nur einer Ionensorte ergibt sich das Nernst-Potential.) Welche Annahme fehlt noch, um die Goldman-Gleichung herleiten zu können? Leiten Sie die Goldman-Gleichung für $z_k = \pm 1$ her!

Besprechung der Übungen am Freitag, den 26.5.2006 um 9.15 Uhr im Raum PH 2271 (Garching).

Übungsleitung:
Moritz Franosch, mail@Franosch.org, http://www.physik.tu-muenchen.de/lehrstuehle/T35/.