Physik Department
TU München
Theoretische Physik

SoSe 2003
Übungsblatt 1
7. Mai 2003

Übung zur theoretischen Physik neuronaler Informationsverarbeitung
(Prof. J. L. van Hemmen)

Aufgabe 1: Goldman-Gleichung

Die Goldman-Gleichung beschreibt das Membranpotential V_m in Abhängigkeit von der Temperatur T, den Ionenkonzentrationen $c_i(\mathrm{X})$ des Ions X innen und $c_a(\mathrm{X})$ außen sowie den Permeabilitäten P_{X}. Für die Ionen $\mathrm{X} \in \{\mathrm{K}^+, \mathrm{Na}^+, \mathrm{Cl}^-\}$ lautet sie

$$V_m = \frac{RT}{F} \ln \left[\frac{P_{\mathrm{K}} c_a(\mathrm{K}^+) + P_{\mathrm{Na}} c_a(\mathrm{Na}^+) + P_{\mathrm{Cl}} c_i(\mathrm{Cl}^-)}{P_{\mathrm{K}} c_i(\mathrm{K}^+) + P_{\mathrm{Na}} c_i(\mathrm{Na}^+) + P_{\mathrm{Cl}} c_a(\mathrm{Cl}^-)} \right]$$

Zeige, dass falls $P_{\mathrm{K}} = P_{\mathrm{Cl}}$ und $P_{\mathrm{Na}} = 0$ und ein Donnan-Gleichgewicht

$$\frac{c_a(\mathrm{K}^+)}{c_i(\mathrm{K}^+)} = \frac{c_i(\mathrm{Cl}^-)}{c_a(\mathrm{Cl}^-)}$$

vorliegt, das Potential V_m gleich dem Nernst-Potential sowohl für K^+ also auch Cl^- ist.

Aufgabe 2: Ladung und Konzentration

Betrachten wir eine Zelle als Kugelkondensator (Radius $r = 10\,\mu\mathrm{m}$, Membrandicke $d = 7\,\mathrm{nm}$, die Dielektrizitätskonstante der Membran sei mit $\varepsilon_r = 1$ angenommen).

Die Membranspannung sei zunächst 0. Welche Überschuss-Konzentration an (einfach geladenen) X^--Ionen ist im Inneren notwendig, um eine Membranspannung $V_m = -70\,\mathrm{mV}$ zu erreichen?

Aufgabe 3: Donnan-Gleichgewicht

Eine Zellwand sei nur für K^+ und Cl^--Ionen gleichermaßen permeabel. Die Anfangskonzentrationen im Inneren der Zelle seien $c_i(\mathrm{Na}^+) = 0.05\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{l}}$, $c_i(\mathrm{K}^+) = 0.1\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{l}}$ und $c_i(\mathrm{Cl}^-) = 0.15\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{l}}$, im Außenraum $c_a(\mathrm{Na}^+) = 0.5\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{l}}$, $c_a(\mathrm{K}^+) = 0.1\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{l}}$ und $c_a(\mathrm{Cl}^-) = 0.6\,\frac{\mathrm{mol}}{\mathrm{l}}$.

Warum ist die Summe der Ladung aller Ionen im Außen- und Innenraum jeweils ungefähr gleich 0 (Quasineutralität)?

Berechne die Gleichgewichtskonzentrationen und das Membranpotential, wenn das Zellvolumen sehr viel kleiner als das Außenvolumen ist.

Bitte wenden.

Aufgabe 4: Kabelgleichung

Die Kabelgleichungen für $C_m = 0$ lauten

$$\begin{aligned} \partial_x V(x) &= -R_i i_\ell(x) && (1) \\ \partial_x i_\ell(x) &= -\frac{1}{R_m} V(x) && (2) \end{aligned}$$

Schreibe dieses Differentialgleichungssystem erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten als

$$\partial_x \vec{y}(x) = A\vec{y}(x)\,,$$

mit $y \in \mathbb{R}^2$ und $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$.

Berechne die allgemeine Lösung.

Besprechung: Freitag 16.5.2003, 11.15 Uhr, Raum PH 127 Garching

Übungsleitung:
Moritz Franosch, Raum 3029, Tel. 289-12194, E-Mail Jan-Moritz.Franosch@ph.tum.de